気象学特論（ａｂ）（2013 年度秋学期）
最終テスト　解答用紙（１）

学籍番号：＿＿＿＿＿＿＿　氏名：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

１．（１）

②の両辺を p で偏微分すると、

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\vec{u}_g \bullet \nabla_p\right)\left\{\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{f_0}{s^2}\frac{\partial}{\partial p}\Psi_g\right)\right\}+\left(\frac{\partial u_g}{\partial p}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial v_g}{\partial p}\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{f_0}{s^2}\frac{\partial}{\partial p}\Psi_g\right)=-\frac{\partial}{\partial p}\omega \qquad ②'$$

左辺の第 2 項は、

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial u_g}{\partial p}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\partial v_g}{\partial p}\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{f_0}{s^2}\frac{\partial}{\partial p}\Psi_g\right)&=\left\{-\left(\frac{\partial}{\partial p}\frac{\partial \Psi_g}{\partial y}\right)\frac{\partial}{\partial x}+\left(\frac{\partial}{\partial p}\frac{\partial \Psi_g}{\partial x}\right)\frac{\partial}{\partial y}\right\}\left(\frac{f_0}{s^2}\frac{\partial \Psi_g}{\partial p}\right)\\&=\frac{f_0}{s^2}\left\{-\left(\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial \Psi_g}{\partial p}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \Psi_g}{\partial p}\right)+\left(\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \Psi_g}{\partial p}\right)\left(\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial \Psi_g}{\partial p}\right)\right\}\\&=0\end{aligned}$$

だから、②'は、

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\vec{u}_g \bullet \nabla_p\right)\left\{\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{f_0}{s^2}\frac{\partial}{\partial p}\Psi_g\right)\right\}=-\frac{\partial}{\partial p}\omega \qquad ②''$$

①＋ f_0 ×②"より、

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+\vec{u}_g \bullet \nabla_p\right)\left\{f_0+\beta y+\nabla_p{}^2\Psi_g+\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{f_0{}^2}{s^2}\frac{\partial}{\partial p}\Psi_g\right)\right\}=0$$

したがって、

$$\underline{q=f_0+\beta y+\nabla_p{}^2\Psi_g+\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{f_0{}^2}{s^2}\frac{\partial}{\partial p}\Psi_g\right)}$$

（１０）

（２）

①の両辺を p で偏微分すると、

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{\partial}{\partial p}\left(\nabla_p{}^2\Psi_g\right)\right\}+\frac{\partial}{\partial p}\left\{\vec{u}_g\bullet\nabla_p\left(f_0+\beta y+\nabla_p{}^2\Psi_g\right)\right\}=f_0\frac{\partial^2}{\partial p^2}\omega \qquad ①'$$

②の両辺に $\nabla_p{}^2$ を作用させると、

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\nabla_p{}^2\left(\frac{f_0}{s^2}\frac{\partial}{\partial p}\Psi_g\right)\right\}+\nabla_p{}^2\left\{\vec{u}_g\bullet\nabla_p\left(\frac{f_0}{s^2}\frac{\partial}{\partial p}\Psi_g\right)\right\}=-\nabla_p{}^2\omega \qquad ②'''$$

$\frac{f_0}{s^2}$ ×①'－②'''より、

$$\left(\nabla_p{}^2+\frac{f_0{}^2}{s^2}\frac{\partial^2}{\partial p^2}\right)\omega=\frac{f_0}{s^2}\frac{\partial}{\partial p}\left\{\vec{u}_g\bullet\nabla_p\left(f_0+\beta y+\nabla_p{}^2\Psi_g\right)\right\}-\nabla_p{}^2\left\{\vec{u}_g\bullet\nabla_p\left(\frac{f_0}{s^2}\frac{\partial}{\partial p}\Psi_g\right)\right\}$$

したがって、

$$\underline{A=f_0+\beta y+\nabla_p{}^2\Psi_g}\,,\quad \underline{B=\frac{f_0}{s^2}\frac{\partial}{\partial p}\Psi_g}$$

気象学特論（ａｂ）（2013 年度秋学期）
最終テスト　解答用紙（２）

学籍番号：＿＿＿＿＿＿＿＿　**氏名**：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

２．（１）

①に②を代入して、

$$\left(-i\omega + iUk\right)\left(-k^2 - l^2\right)\hat{\Psi}\exp[ik(kx + ly - \omega t)] + i\beta k\hat{\Psi}\exp[ik(kx + ly - \omega t)] = 0$$

両辺を $\hat{\Psi}\exp[ik(kx + ly - \omega t)]$ で割って、

$$\left(-i\omega + iUk\right)\left(-k^2 - l^2\right) + i\beta k = 0$$

$$\left(\omega - Uk\right)\left(k^2 + l^2\right) + \beta k = 0$$

$$\underline{\omega = Uk - \frac{\beta k}{k^2 + l^2}}$$

（１０）

（２）

分散関係式に $\omega = 0$ を代入して、

$$0 = Uk - \frac{\beta k}{k^2 + l^2}$$

$$k^2 + l^2 = \frac{\beta}{U}$$

$$\underline{K = \sqrt{\frac{\beta}{U}}}$$

（１０）

（３）

$$c_{g_x}=\frac{\partial\omega}{\partial k}=U-\frac{\beta\left(k^2+l^2\right)-2\beta k^2}{\left(k^2+l^2\right)^2}=U+\frac{\beta\left(k^2-l^2\right)}{\left(k^2+l^2\right)^2}$$

（２）の結果より、$\beta=U\left(k^2+l^2\right)$だから、

$$c_{gx}=U+\frac{k^2-l^2}{k^2+l^2}U=\underline{\frac{2k^2}{k^2+l^2}U}$$

（１０）

（４）

$$c_{gy}=\frac{\partial\omega}{\partial l}=\frac{2\beta kl}{\left(k^2+l^2\right)^2}$$

（２）の結果より、$\beta=U\left(k^2+l^2\right)$だから、

$$c_{gy}=\frac{2kl\left(k^2+l^2\right)}{\left(k^2+l^2\right)^2}U=\underline{\frac{2kl}{k^2+l^2}U}$$

（１０）

（５）

$$c_{gx}-U=\left(\frac{2k^2}{k^2+l^2}-1\right)U=\frac{k^2-l^2}{k^2+l^2}U$$

$$c_{gy}=\frac{2kl}{k^2+l^2}U$$

だから、

$$\left(c_{gx}-U\right)^2+c_{gy}{}^2=\frac{\left(k^2-l^2\right)^2}{\left(k^2+l^2\right)^2}U^2+\frac{4k^2l^2}{\left(k^2+l^2\right)^2}U^2=U^2$$

$$\underline{\left(c_{gx}-U\right)^2+c_{gy}{}^2=U^2}$$

（１０）

気象学特論（ａｂ）（2013 年度秋学期）
最終テスト　解答用紙（３）

学籍番号：＿＿＿＿＿＿＿＿　氏名：＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿

３．（１）

④を②に代入すると、

$$\underline{-k^2\left(-i\nu - ikU\right)\hat{\Psi}_3 = \hat{\omega}_2} \qquad ②'$$

④を③に代入すると、

$$-i\nu\left(\hat{\Psi}_1 - \hat{\Psi}_3\right) - ikU\left(\hat{\Psi}_1 + \hat{\Psi}_3\right) = \frac{1}{\lambda^2}\hat{\omega}_2$$

$$\underline{\left(-i\nu - ikU\right)\hat{\Psi}_1 + \left(i\nu - ikU\right)\hat{\Psi}_3 = \frac{1}{\lambda^2}\hat{\omega}_2} \qquad ③'$$

（１０）

（２）

連立方程式①'～③'は、

$$\begin{pmatrix} -k^2\left(-i\nu + ikU\right) & 0 & -1 \\ 0 & -k^2\left(-i\nu - ikU\right) & 1 \\ -i\nu - ikU & i\nu - ikU & -\dfrac{1}{\lambda^2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \hat{\Psi}_1 \\ \hat{\Psi}_3 \\ \hat{\omega}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

と書くことができる。したがって、

$$\underline{A = \begin{pmatrix} -k^2\left(-i\nu + ikU\right) & 0 & -1 \\ 0 & -k^2\left(-i\nu - ikU\right) & 1 \\ -i\nu - ikU & i\nu - ikU & -\dfrac{1}{\lambda^2} \end{pmatrix}}$$

（１０）

（３）

行列Aの行列式がゼロだから、

$$k^4\left(-i\nu+ikU\right)\left(-i\nu-ikU\right)\left(-\frac{1}{\lambda^2}\right)-\left(-k^2\right)\left(-i\nu+ikU\right)\left(i\nu-ikU\right)$$
$$-\left(-1\right)\left(-i\nu-ikU\right)\left(-k^2\right)\left(-i\nu-ikU\right)=0$$

$$-k^4\left(k^2U^2-\nu^2\right)\frac{1}{\lambda^2}+k^2\left(\nu-kU\right)\left(\nu-kU\right)+k^2\left(\nu+kU\right)\left(\nu+kU\right)=0$$

$$-k^2\left(k^2U^2-\nu^2\right)\frac{1}{\lambda^2}+2\left(\nu^2+k^2U^2\right)=0$$

$$\left(\frac{1}{\lambda^2}k^2+2\right)\nu^2-k^2U^2\left(\frac{1}{\lambda^2}k^2-2\right)=0$$

$$\left(k^2+2\lambda^2\right)\nu^2-k^2U^2\left(k^2-2\lambda^2\right)=0$$

$$\underline{\nu^2=\frac{k^2U^2\left(k^2-2\lambda^2\right)}{k^2+2\lambda^2}}$$