気象学特論（ａａ）（2017 年度春学期）
最終テスト

注意：計算問題においては計算過程も示すこと。

１．一定の角速度$\vec{\Omega}$で回転する回転系における空気塊の運動方程式を考える。慣性系における空気塊の位置ベクトルを$\vec{r_a}$とすると、慣性系における運動方程式は、

$$\frac{D_a}{Dt}\left(\frac{D_a}{Dt}\vec{r_a}\right) = -\frac{1}{\rho}\nabla p + \vec{g^*} \qquad ①$$

と書ける。ここでは、空気塊にはたらく力として、気圧傾度力と万有引力を考えていて、ρは密度、pは圧力、$\vec{g^*}$は単位質量あたりの万有引力ベクトルである。$\frac{D_a}{Dt}$は慣性系を基準に観測したときのラグランジュ微分であり、回転系を基準に観測したときのラグランジュ微分$\frac{D}{Dt}$とは異なる。一般に、ベクトル量$\vec{x}$について、

$$\frac{D_a}{Dt}\vec{x_a} = \frac{D}{Dt}\vec{x} + \vec{\Omega} \times \vec{x} \qquad ②$$

が成り立っている。$\vec{x_a}$は慣性系を基準に観測したときのベクトル量、$\vec{x}$は回転系を基準に観測したときのベクトル量である。②を用いて、①から、回転系における運動方程式を導け。つまり、①において、（すべての）$\frac{D_a}{Dt}$を$\frac{D}{Dt} + \vec{\Omega} \times$に、$\vec{r_a}$を$\vec{r}$に置き換えよ。ただし、$\vec{g} = \vec{g^*} - \vec{\Omega} \times \left(\vec{\Omega} \times \vec{r}\right)$とし、また、風速$\vec{u}$についての関係式$\vec{u} = \frac{D}{Dt}\vec{r}$を用いて、$\vec{r}$を含まない形で答えよ。得られた運動方程式において、$-2\vec{\Omega} \times \vec{u}$はコリオリ力を意味する。

２．北半球における低気圧や高気圧のまわりの風と気圧傾度力との関係について、以下の問いに答えよ。

（１）２次元の水平面上での大気の運動を考える。空気塊が低気圧または高気圧の中心のまわりを円運動している。円運動の半径はR、円運動の速さ（風速）はVである（反時計回りの場合を正とする）。気圧勾配は半径rの方向にのみ存在し、（単位質量にはたらく）気圧傾度力はジオポテンシャルΦを用いて$P \equiv -\frac{\partial \Phi}{\partial r}$と書けるものとする（外向きの気圧傾度力を正とする）。この空気塊にはたらくコリオリ力fV、遠心力、気圧傾度力Pがつりあっているという条件のもとでVが満たす方程式をV、コリオリ係数f（＞０）、R、Pを用いて表せ。なお、コリオリ力の大きさは速さVにコリオリ係数fをかけたものに等しく、北半球では進行方向右向きにはたらく。

（２）（１）で得られた方程式を

$$g(V) = P$$

の形で書いたときの関数$g(V)$の概形を図示せよ（横軸にV、縦軸に$g(V)$）。極大値、極小値が存在する場合には、その値と、そのときのVの値を、また、座標軸との交点がある場合には、切片の値を図中に示すこと。高気圧に対応する外向きの気圧傾度力には上限があることがわかる。

（３）（１）で得られた方程式において、$R \to \infty$の極限を考える。このとき、VはfとPを用いてどのように表せるか。$V = \ldots$という形で答えよ。この関係は地衡風の関係とよばれる。

（４）（３）で得られたVとPとの関係（地衡風の関係）を（２）の図に点線でかき加えよ。共有する点がある場合には、交わっているのか接しているのかに注意すること。

３．順圧流体の運動を考える。流体の密度は一定とする。このとき、連続の式は

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0 \qquad ①$$

と書ける。ただし、u、v、w は流速の x 成分（東西成分）、y 成分（南北成分）、z 成分（鉛直成分）である。本問では、u、v は鉛直方向には一定とする。また、流体層の厚さ h の時間変化は

$$\frac{D}{Dt}h=h\frac{\partial w}{\partial z} \qquad ②$$

である。ただし、ラグランジュ微分は

$$\frac{D}{Dt}=\frac{\partial}{\partial t}+u\frac{\partial}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial y}$$

と書ける。

（１）①、②を用いて、$\frac{D}{Dt}h$ を h、$\frac{\partial u}{\partial x}$、$\frac{\partial v}{\partial y}$ で表せ。

（２）運動量の水平移流を考慮すると、運動方程式は

$$\frac{D}{Dt}u=\frac{\partial}{\partial t}u+u\frac{\partial}{\partial x}u+v\frac{\partial}{\partial y}u=-g\frac{\partial h}{\partial x} \qquad ③$$

$$\frac{D}{Dt}v=\frac{\partial}{\partial t}v+u\frac{\partial}{\partial x}v+v\frac{\partial}{\partial y}v=-g\frac{\partial h}{\partial y} \qquad ④$$

と書ける。ただし、g は重力加速度である。このとき、③を y で偏微分し、④を x で偏微分したうえで、両者の差を計算することによって、渦度方程式

$$\frac{D}{Dt}\xi=-\xi\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right) \qquad ⑤$$

を導け。ただし、ξ は相対渦度であり、

$$\xi=\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}$$

と定義される。解答には、<u>③を y で偏微分した式</u>と、<u>④をxで偏微分した式</u>を明記すること。移流項の微分に注意せよ。

（3）（1）の結果と⑤を用いて、

$$\frac{D}{Dt}\left(\frac{\xi}{h}\right) = 0 \qquad ⑥$$

であることを示せ。

４．熱力学方程式と温位について、以下の問いに答えよ。

（１）物理量θを気体の温度Tと圧力pの関数として

$$\theta = T\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\kappa} \qquad ①$$

と定義する。ただし、κは定数である。また、p_0は基準となる圧力であり、これも定数である。θの微分$d\theta$を

$$d\theta = adT + bdp \qquad ②$$

と書いたとき、a、bをκ、p_0、T、pで表せ。

（２）乾燥空気に関して、熱力学の第１法則は、次のように書ける。

$$d'Q = C_v dT + pd\alpha$$

ただし、T、p、αは、それぞれ温度、圧力、比容（密度の逆数）であり、すべて正の値をとる。また、C_vは定積比熱であり、正の一定値をとる。したがって、断熱（$d'Q = 0$）という条件のもとでは、

$$C_v dT + pd\alpha = 0 \qquad ③$$

が成り立つ。一方、乾燥空気を理想気体とみなせば、状態方程式は、

$$p\alpha = RT \qquad ④$$

と書ける。ただし、Rは気体定数であり、正の一定値をとる。④を用いて③を書きかえると、

$$C_p dT - \alpha dp = 0 \qquad ⑤$$

が得られる。ただし、C_pは定圧比熱であり、$C_p = C_v + R$である。（１）の結果と、⑤を比較することによって、断熱という条件のもとで、物理量θが保存量になるようにκの値を定め、C_pとRで表せ。κの符号に注意せよ。