気象学特論（ａａ）（2015 年度春学期）
最終テスト

注意：特に指示がない限り、計算問題においては計算過程も示すこと。

１．回転系における順圧大気を考える。大気の密度は一定とする。このとき、連続の式は

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0 \quad ①$$

と書ける。ただし、u、v、w は風速の x 成分（東西成分）、y 成分（南北成分）、z 成分（鉛直成分）である。また、注目している大気層の厚さ h の時間変化は

$$\frac{D}{Dt}h=h\frac{\partial w}{\partial z} \quad ②$$

である。

（１）①、②を用いて、$\frac{D}{Dt}h$ を h、$\frac{\partial u}{\partial x}$、$\frac{\partial v}{\partial y}$ で表せ。

（２）渦度方程式

$$\frac{D}{Dt}(f+\xi)=-(f+\xi)\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right) \quad ③$$

が成り立つとしたとき、

$$\frac{D}{Dt}\left(\frac{f+\xi}{h}\right)=0 \quad ④$$

であることを示せ。ただし、f は惑星渦度、ξ は相対渦度である。

２．循環について、以下の問いに答えよ。

一般に、循環Cは

$$C=\oint \vec{u}\bullet d\vec{l}$$

と定義される。$\vec{u}$は風速ベクトル、$d\vec{l}$は循環を計算する領域を囲む閉曲線の接線ベクトルである。このとき、循環のラグランジュ微分は、

$$\frac{D}{Dt}C=\oint\left(\frac{D}{Dt}\vec{u}\right)\bullet d\vec{l}+\oint \vec{u}\bullet d\vec{u} \qquad ①$$

と表される。ここで、運動方程式を

$$\frac{D}{Dt}\vec{u}=-\frac{1}{\rho}\nabla p-\nabla\Phi \qquad ②$$

として、①を変形し

$$\frac{D}{Dt}C=\oint a dp$$

の形に表したとき、aを求めよ。ただし、ρは密度、pは圧力、Φはジオポテンシャルである。

ヒント：一般に、スカラー量q、rに対して、

$$\oint (q\nabla r)\bullet d\vec{l}=\oint q dr$$

ベクトル量sに対して、

$$\oint \vec{s}\bullet d\vec{s}=\frac{1}{2}\oint d\left(\vec{s}\bullet\vec{s}\right)$$

が成り立つ。

３．渦度について、以下の問いに答えよ。ただし、渦度の鉛直成分のみを考えればよい。

（１）ある観測点では、西風が、北に 1km 移動するごとに、0.04m/s の割合で弱くなっている。風速場は東西方向には一様で、南北風は吹いていないものとする。この地点での相対渦度を<u>有効数字１桁で</u>求めよ。相対渦度 ξ の定義は

$$\xi = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \qquad ①$$

である。ただし、u は風速の x 成分（東西成分）、v は y 成分（南北成分）である。

（２）（１）で求めた相対渦度を持った空気塊が、北緯 45 度から北緯 30 度に移動した。この間、絶対渦度は保存していたものとする。北緯 30 度に達したときの相対渦度を<u>有効数字１桁で</u>求めよ。ただし、地球の自転角速度を $\Omega = 7.2 \times 10^{-5}$ /s とする。なお、一般に、惑星渦度は $f = 2\Omega \sin\phi$（ϕ は緯度）である。

（３）北緯 30 度に、相対渦度を持たない空気塊が存在する。この領域で -1.0×10^{-5} /s の水平発散が生じている。空気塊は南北方向には移動せず、鉛直流の水平シアはないものとする。渦度方程式

$$\frac{D}{Dt}(f + \xi) = -(f + \xi)\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) \qquad ②$$

が成り立つとして、この空気塊の相対渦度の時間変化率（ラグランジュ微分）を<u>有効数字２桁で</u>求めよ。ただし、地球の自転角速度を $\Omega = 7.2 \times 10^{-5}$ /s とする。

４．熱力学方程式と温位について、以下の問いに答えよ。

乾燥空気に関して、熱力学の第１法則は、次のように書ける。

$$d'Q = C_v dT + pd\alpha$$

ただし、T、p、α は、それぞれ温度、圧力、比容（密度の逆数）であり、すべて正の値をとる。また、C_v は定積比熱（$C_v > 0$）であり、一定値をとる。したがって、断熱（$d'Q = 0$）という条件のもとでは、

$$C_v dT + pd\alpha = 0 \qquad ①$$

が成り立つ。一方、乾燥空気を理想気体とみなせば、状態方程式は、

$$p\alpha = RT \qquad ②$$

と書ける。ただし、R は気体定数（$R > 0$）であり、一定値をとる。

（１）②を用いて①を書きかえ、

$$adT + bdp = 0 \qquad ③$$

と表したとき、a、b を C_p、R、T、p で表せ。ただし、C_p は定圧比熱であり、$C_p = C_v + R$ である。

（２）物理量 θ を T と p の関数として

$$\theta = T\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\kappa} \qquad ④$$

と定義する。ただし、κ は定数である。また、p_0 は基準となる圧力であり、これも定数である。θ の微分 $d\theta$ を

$$d\theta = a'dT + b'dp \qquad ⑤$$

と表したとき、a'、b' を κ、p_0、T、p で表せ。

（３）以上の小問の結果を用いて、断熱という条件のもとで、物理量 θ が保存量になるように κ の値を定め、C_p と R で表せ。

（４）（３）で定義した物理量 θ について、

$$\frac{d\theta}{dz} = \left(\frac{\partial\theta}{\partial T}\right)_p \frac{dT}{dz} + \left(\frac{\partial\theta}{\partial p}\right)_T \frac{dp}{dz} \qquad ⑥$$

を計算したうえで、$\dfrac{d\theta}{dz} = 0$ とおくことによって、$\dfrac{dT}{dz}$ を求め、C_p と g で表せ。ただし、静水圧平衡を仮定し、

$$\frac{dp}{dz} = -\frac{g}{\alpha} \qquad ⑦$$

とせよ。g は重力加速度である。