

気象学特論（a a） 参考資料

1 ナビエ・ストークスの方程式

ニュートン力学の第2法則より、単位体積の流体についての運動方程式は

$$\rho \frac{D}{Dt} \vec{u} = \rho \vec{g} + \left(\frac{\partial}{\partial x_j} p_{ij} \right)_i \quad (1)$$

と書ける。ただし、 ρ は密度、 $\vec{u}$ は速度、 $\vec{g}$ は重力加速度、 p_{ij} は応力テンソルである。

左辺は単位体積の流体に生じた加速度に密度をかけたもの、つまり、運動量の時間変化を表していて、

$$\frac{D}{Dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \quad (2)$$

である。 $\frac{D}{Dt}$ は、流体の流れに沿って移動しながら観測した時間変化であって、

ラグランジュ微分または**物質微分**とよばれる。一方、 $\frac{\partial}{\partial t}$ は、空間の中のある一点にとどまって観測した時間変化であって、**オイラー微分**または**局所微分**とよばれる。 $\vec{u} \cdot \nabla$ は、移流の効果を表している。

(1)の右辺は流体にはたらく力を表し、第1項は重力、第2項は**応力**である。応力とは流体の境界面に対して、単位面積あたりにはたらく力である。たとえば、 p_{21} は外向きの法線ベクトルが+x方向の境界面に対してはたらくy方向の力である（x方向、z方向の力はそれぞれ p_{11} 、 p_{31} である）。逆に-x方向の境界面に対しては $-p_{21}$ の力がはたらく。ここで p_{21} がx方向に一様であれば、正味で流体にはたらく力はゼロである。しかし、 p_{21} がx方向に変化していれば、流体に正味の加速度が生じる。(1)の右辺第2項はこの効果を表している。

流体の定義より静止流体中では接線応力 p_{ij} は $p_{ij} = 0 (i \neq j)$ なので、等方性を仮定すれば、

$$p_{ij} = -p\delta_{ij} \quad (3)$$

と表せる。ここで p は（静止流体の）圧力と定義される¹。次に流体が運動している場合を考える。速度勾配テンソル $\frac{\partial u_i}{\partial x_j}$ を対称成分と反対称成分に分けて、

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad \Omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (4)$$

とする。ニュートン流体を仮定すると、偏差応力テンソル $\sigma = \{\sigma_{ij}\}$ は、ひずみ速度テンソル $\mathbf{e} = \{e_{ij}\}$ に比例するので、

$$p_{ij} = -p\delta_{ij} + \sigma_{ij} \quad (5)$$

$$\sigma_{ij} = a_{ijkl}e_{kl} \quad (6)$$

と表す。4 階のテンソル $\mathbf{a} = \{a_{ijkl}\}$ の等方性を仮定すると、

$$a_{ijkl} = B\delta_{ij}\delta_{kl} + C\delta_{ik}\delta_{jl} + D\delta_{il}\delta_{jk} \quad (7)$$

と書ける²。(7)を(6)に代入すると、ひずみ速度テンソルの対称性 $e_{kl} = e_{lk}$ を考えて、

$$\sigma_{ij} = B\delta_{ij}\delta_{kl}e_{kl} + (C + D)\delta_{ik}\delta_{jl}e_{kl} \quad (8)$$

$B = \lambda$ 、 $C + D = 2\mu$ とすると、

$$\sigma_{ij} = \lambda\delta_{ij}e_{kk} + 2\mu e_{ij} \quad (9)$$

ここで、 μ は粘性率、 λ は第 2 粘性率と呼ぶことがある。

(5)、(9)より、

$$p_{ij} = -p\delta_{ij} + \left(\lambda + \frac{2}{3}\mu \right) \delta_{ij}e_{kk} + 2\mu \left(e_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}e_{kk} \right) \quad (10)$$

ここで $\chi = \lambda + \frac{2}{3}\mu$ は体積粘性率と呼ばれることがある³。 μ 、 λ は一定であるとして、(9)または(10)を(1)に代入すると、

$$\rho \frac{D}{Dt} \vec{u} = \rho \vec{g} - \nabla p + (\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot \vec{u}) + \mu \nabla^2 \vec{u} \quad (11)$$

さらに非発散を仮定すると³、

$$\rho \frac{D}{Dt} \vec{u} = \rho \vec{g} - \nabla p + \mu \nabla^2 \vec{u} \quad (12)$$

両辺を ρ で割って、動粘性係数 $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ とすると、

$$\frac{D}{Dt} \vec{u} = \vec{g} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \vec{u} \quad (13)$$

この方程式は**ナビエ・ストークスの方程式**と呼ばれ、流体力学における運動方程式である。

課題 1.1 式(13)において、 $\vec{u} = \vec{0}$ を仮定して、 $\frac{\partial p}{\partial z}$ を求めよ。ただし、 $\vec{g} = (0, 0, -g)$ とする。この関係を**静水圧平衡**という。

¹ 運動している流体の圧力の定義は 2 通りある。ひとつは、あくまで静止時における法線応力から(3)で定義するもので、もうひとつは(5)において

$$p' = -\frac{1}{3} p_{ii} = p - \frac{1}{3} \sigma_{ii} = p - \left(\lambda + \frac{2}{3} \mu \right) e_{ii}$$

として改めて定義するものである。上の説明は前者の立場に基づいている。この場合、「静止流体の」という記述は不要である。後者の立場に従った場合、(10)の右辺第 1 項の p を p' に置き換えて第 2 項を消去することができる。これは体積粘性の効果を圧力に含めて考えることを意味する。一般には p と p' は等しくないことに注意。

² 等方な 4 階テンソルが一般に(7)の形で表せることについては本来証明が必要である。任意の回転変換に対して表式が変わらないという条件から(7)の条件が導かれる。計算が煩雑なので、ここでは省略する。

³ 非発散の仮定は、液体に対しては妥当であるが、気体に対しては必ずしも妥当ではない。なお、体積粘性率 χ は、単原子理想気体では $\chi = 0$ 、その他の気体でも実験室での測定から多くの場合 $|\chi| \ll \mu$ であることが分かっている。 μ 、 χ とも分子粘性を

表す係数であるが、地球流体力学では分子粘性より渦粘性のほうが重要であり、渦粘性を分子粘性の類似として表現しているにすぎないので、この点においてふたつの係数の区別を議論することにはあまり意味がない。

2 回転系における運動方程式

慣性系におけるナビエ・ストークスの方程式は、

$$\frac{D}{Dt} \vec{u} = \vec{g} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \vec{u} \quad (1)$$

と書ける。回転系 R におけるベクトル量とラグランジュ微分を添え字 R であらわすと、

$$\frac{D}{Dt} \vec{r} = \left(\frac{D_R}{Dt} + \vec{\Omega} \times \right) \vec{r}_R \quad (2)$$

となる。ただし、 $\vec{\Omega}$ は回転系の自転の角速度ベクトルである。ここで、ベクトル $\vec{R}_R$ を、

$$\vec{R}_R = \vec{r}_R - \frac{(\vec{\Omega} \cdot \vec{r}_R)}{\Omega^2} \vec{\Omega} \quad (3)$$

と定義する。ただし、 Ω は回転系の自転の角速度である。式(3)の右辺第2項は $\vec{r}_R$

のうち $\vec{\Omega}$ に平行な成分を表している。このとき、

$$\frac{D}{Dt} \vec{u} = \frac{D}{Dt} \left(\frac{D}{Dt} \vec{r} \right) = \left(\frac{D_R}{Dt} + \vec{\Omega} \times \right) \left(\frac{D_R}{Dt} + \vec{\Omega} \times \right) \vec{r}_R = \frac{D_R}{Dt} \vec{u}_R + 2\vec{\Omega} \times \vec{u}_R - \Omega^2 \vec{R}_R \quad (4)$$

となるので、

$$\frac{D_R}{Dt} \vec{u}_R = -2\vec{\Omega} \times \vec{u}_R + \Omega^2 \vec{R}_R + \vec{g} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \vec{u}_R \quad (5)$$

$\vec{g}_R = \vec{g} + \Omega^2 \vec{R}_R$ とすると、

$$\frac{D_R}{Dt} \vec{u}_R = -2\vec{\Omega} \times \vec{u}_R + \vec{g}_R - \frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \vec{u}_R \quad (6)$$

添え字 R を消去して、

$$\frac{D}{Dt} \vec{u} = -2\vec{\Omega} \times \vec{u} + \vec{g} - \frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \vec{u} \quad (7)$$

これが回転系におけるナビエ・ストークスの方程式である。

ここで極座標系を導入する。原点からの距離、緯度、経度を r 、 ϕ 、 λ とする

と、位置ベクトル $\vec{r}$ は、直交座標系における基本ベクトル $(\hat{i}, \hat{j}, \hat{k})$ を用いて、

$$\vec{r} = r \cos \phi \cos \lambda \hat{i} + r \cos \phi \sin \lambda \hat{j} + r \sin \phi \hat{k} \quad (8)$$

と書ける。このとき極座標系における局所的な基本ベクトル $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ を

$$\begin{aligned} \vec{i} &= \frac{1}{r \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \lambda} \vec{r} = -\sin \lambda \hat{i} + \cos \lambda \hat{j} \\ \vec{j} &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \vec{r} = -\sin \phi \cos \lambda \hat{i} - \sin \phi \sin \lambda \hat{j} + \cos \phi \hat{k} \\ \vec{k} &= \frac{\partial}{\partial \phi} \vec{r} = \cos \phi \cos \lambda \hat{i} + \cos \phi \sin \lambda \hat{j} + \sin \phi \hat{k} \end{aligned} \quad (9)$$

と定義できる。極座標系における $\vec{i}$ 、 $\vec{j}$ 、 $\vec{k}$ の空間微分は、

$$\begin{aligned} \frac{1}{r \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \lambda} \vec{i} &= -\frac{1}{r \cos \phi} \cos \lambda \hat{j} + \frac{1}{r \cos \phi} \sin \lambda \hat{k} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} \vec{i} &= \vec{0} \\ \frac{\partial}{\partial r} \vec{i} &= \vec{0} \\ \frac{1}{r \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \lambda} \vec{j} &= \frac{1}{r \cos \phi} \sin \phi \sin \lambda \hat{i} - \frac{1}{r \cos \phi} \sin \phi \cos \lambda \hat{j} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} \vec{j} &= -\frac{1}{r} \cos \phi \cos \lambda \hat{i} - \frac{1}{r} \cos \phi \sin \lambda \hat{j} - \frac{1}{r} \sin \phi \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial r} \vec{j} &= \vec{0} \\ \frac{1}{r \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \lambda} \vec{k} &= -\frac{1}{r} \sin \lambda \hat{i} + \frac{1}{r} \cos \lambda \hat{j} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} \vec{k} &= -\frac{1}{r} \sin \phi \cos \lambda \hat{i} - \frac{1}{r} \sin \phi \sin \lambda \hat{j} + \frac{1}{r} \cos \phi \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial r} \vec{k} &= \vec{0} \end{aligned} \quad (10)$$

となる。(9)を用いて、(10)を基本ベクトル $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ で表すと、

$$\frac{1}{r \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \lambda} \vec{i} = \frac{\sin \phi}{r \cos \phi} \vec{j} - \frac{1}{r} \vec{k}, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} \vec{i} = \vec{0}, \quad \frac{\partial}{\partial r} \vec{i} = \vec{0} \quad (11)$$

$$\begin{aligned}\frac{1}{r \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \lambda} \vec{j} &= -\frac{\sin \phi}{r \cos \phi} \vec{i}, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} \vec{j} = -\frac{1}{r} \vec{k}, \quad \frac{\partial}{\partial r} \vec{j} = \vec{0} \\ \frac{1}{r \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \lambda} \vec{k} &= \frac{1}{r} \vec{i}, \quad \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} \vec{k} = \frac{1}{r} \vec{j}, \quad \frac{\partial}{\partial r} \vec{k} = \vec{0}\end{aligned}$$

なので、 $\vec{u} = \dot{u}\vec{i} + \dot{v}\vec{j} + \dot{w}\vec{k}$ のラグランジュ微分は

$$\begin{aligned}\frac{D}{Dt} \vec{u} &= \dot{\vec{i}} \frac{D}{Dt} u + \vec{j} \frac{D}{Dt} v + \vec{k} \frac{D}{Dt} w + u \frac{D}{Dt} \vec{i} + v \frac{D}{Dt} \vec{j} + w \frac{D}{Dt} \vec{k} \\ &= \dot{\vec{i}} \frac{D}{Dt} u + \vec{j} \frac{D}{Dt} v + \vec{k} \frac{D}{Dt} w \\ &\quad + \left(-\frac{uv \sin \phi}{r \cos \phi} + \frac{uw}{r} \right) \vec{i} + \left(\frac{u^2 \sin \phi}{r \cos \phi} + \frac{vw}{r} \right) \vec{j} + \left(-\frac{u^2 + v^2}{r} \right) \vec{k}\end{aligned} \tag{12}$$

となる。また、2 階微分の演算子 ∇^2 は

$$\begin{aligned}\nabla^2 &= \left(\dot{\vec{i}} \frac{1}{r \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \lambda} + \vec{j} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial r} \right) \left(\dot{\vec{i}} \frac{1}{r \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \lambda} + \vec{j} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial r} \right) \\ &= \frac{1}{r^2 \cos^2 \phi} \frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{\sin \phi}{r^2 \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r}\end{aligned} \tag{13}$$

だから、

$$\begin{aligned}\nabla^2 \vec{u} &= \dot{\vec{i}} \nabla^2 u + \vec{j} \nabla^2 v + \vec{k} \nabla^2 w + 2 \left(\frac{\partial \dot{\vec{i}}}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_i} + \frac{\partial \vec{j}}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} + \frac{\partial \vec{k}}{\partial x_i} \frac{\partial w}{\partial x_i} \right) \\ &\quad + u \nabla^2 \vec{i} + v \nabla^2 \vec{j} + w \nabla^2 \vec{k} \\ &= \dot{\vec{i}} \left(\nabla^2 u - \frac{u}{r^2 \cos^2 \phi} - \frac{2 \sin \phi}{r^2 \cos^2 \phi} \frac{\partial}{\partial \lambda} v + \frac{2}{r^2 \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \lambda} w \right) \\ &\quad + \vec{j} \left(\nabla^2 v - \frac{v}{r^2 \cos^2 \phi} + \frac{2 \sin \phi}{r^2 \cos^2 \phi} \frac{\partial}{\partial \lambda} u + \frac{2}{r^2} \frac{\partial}{\partial \phi} w \right) \\ &\quad + \vec{k} \left(\nabla^2 w - \frac{2}{r^2} w - \frac{2}{r^2 \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \lambda} u - \frac{2}{r^2} \frac{\partial}{\partial \phi} v + \frac{2 \sin \phi}{r^2 \cos \phi} v \right)\end{aligned} \tag{14}$$

(12)、(14)を(7)に代入して、

$$\begin{aligned}\frac{D}{Dt} u &= 2\Omega v \sin \phi + \frac{uv}{r} \tan \phi - 2\Omega w \cos \phi - \frac{uw}{r} \\ &\quad - \frac{1}{\rho} \frac{1}{r \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \lambda} p + v \left(\nabla^2 u - \frac{u}{r^2 \cos^2 \phi} - \frac{2 \sin \phi}{r^2 \cos^2 \phi} \frac{\partial}{\partial \lambda} v + \frac{2}{r^2 \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \lambda} w \right)\end{aligned} \tag{15}$$

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} v = & -2\Omega u \sin \phi - \frac{u^2}{r} \tan \phi - \frac{vw}{r} \\ & - \frac{1}{\rho} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} p + v \left(\nabla^2 v - \frac{v}{r^2 \cos^2 \phi} + \frac{2 \sin \phi}{r^2 \cos^2 \phi} \frac{\partial}{\partial \lambda} u + \frac{2}{r^2} \frac{\partial}{\partial \phi} w \right) \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} w = & 2\Omega u \cos \phi + \frac{u^2 + v^2}{r} \\ & - g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial r} p + v \left(\nabla^2 w - \frac{2}{r^2} w - \frac{2}{r^2 \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \lambda} u - \frac{2}{r^2} \frac{\partial}{\partial \phi} v + \frac{2 \sin \phi}{r^2 \cos \phi} v \right) \end{aligned} \quad (17)$$

以下では、簡単のため(15)～(17)の粘性項を F_x 、 F_y 、 F_z で表すことにする。

$$\frac{D}{Dt} u = 2\Omega v \sin \phi + \frac{uv}{r} \tan \phi - 2\Omega w \cos \phi - \frac{uw}{r} - \frac{1}{\rho} \frac{1}{r \cos \phi} \frac{\partial}{\partial \lambda} p + F_x \quad (18)$$

$$\frac{D}{Dt} v = -2\Omega u \sin \phi - \frac{u^2}{r} \tan \phi - \frac{vw}{r} - \frac{1}{\rho} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} p + F_y \quad (19)$$

$$\frac{D}{Dt} w = 2\Omega u \cos \phi + \frac{u^2 + v^2}{r} - g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial r} p + F_z \quad (20)$$

地球半径を a として、 $|r-a| \ll a$ を仮定すると、(18)～(20)において $r=a$ と近似できる。近似する前の(18)～(20)における慣性系 I から見た地球中心の周りの角運動量 $\vec{L}$ は、

$$\vec{\Omega} = \vec{j}\Omega \cos \phi + \vec{k}\Omega \sin \phi \quad (21)$$

を用いて、

$$\begin{aligned} \vec{L} &= \vec{r} \times (\vec{u} + \vec{\Omega} \times \vec{r}) = \vec{k}r \times (\dot{i}u + \vec{j}v + \vec{k}w + \vec{\Omega}r) \\ &= -\dot{i}ru + \vec{j}(ru + r\Omega^2 \cos \phi) \end{aligned} \quad (22)$$

と書けるので、慣性系 I から見た $\vec{L}$ のラグランジュ微分は、

$$\begin{aligned}
\frac{D_L}{Dt} \vec{L} &= \left(\frac{D}{Dt} + \vec{\Omega} \times \right) \vec{L} = \frac{D}{Dt} \vec{L} + \vec{\Omega} \times \vec{L} \\
&= \dot{i} \left(-r \frac{D}{Dt} v - r\Omega u \sin \phi - u^2 \tan \phi - vw \right) \\
&\quad - \vec{j} \left(r \frac{D}{Dt} u - r\Omega v \sin \phi - uv \tan \phi + 2r\Omega w \cos \phi + uw \right) \\
&\quad - \vec{k} r \Omega v \cos \phi \\
&\quad + \dot{i} \left(-r\Omega u \sin \phi - r^2 \Omega^2 \cos \phi \sin \phi \right) - \vec{j} r \Omega v \sin \phi + \vec{k} r \Omega v \cos \phi \\
&= \vec{j} r \left(\frac{D}{Dt} u - 2\Omega v \sin \phi - \frac{uv}{r} \tan \phi + 2\Omega w \cos \phi + \frac{uw}{r} \right) \\
&\quad - \dot{i} r \left(\frac{D}{Dt} v + 2\Omega u \sin \phi + \frac{u^2}{r} \tan \phi + \frac{vw}{r} \right) - \dot{i} r^2 \Omega^2 \sin \phi \cos \phi
\end{aligned} \tag{23}$$

と表せる。また力学的エネルギー e のラグランジュ微分は、

$$\begin{aligned}
\frac{D}{Dt} e &= \frac{D}{Dt} \left(\frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} + gz \right) = u \frac{D}{Dt} u + v \frac{D}{Dt} v + w \frac{D}{Dt} w + gw \\
&= gw - \frac{1}{\rho} \vec{u} \bullet \nabla p + uF_x + vF_y + wF_z
\end{aligned} \tag{24}$$

と書ける。

次に、 $r=a$ と近似した後の $\vec{L}$ と e のラグランジュ微分を計算すると、 $r=a$ が定数であって、 r のラグランジュ微分がゼロであることに注意して、

$$\begin{aligned}
\left(\frac{D_L}{Dt} \vec{L} \right)^* &= \vec{j} r \left\{ \left(\frac{D}{Dt} u \right)^* - 2\Omega v \sin \phi - \frac{uv}{r} \tan \phi \right\} \\
&\quad - \dot{i} r \left\{ \left(\frac{D}{Dt} v \right)^* + 2\Omega u \sin \phi + \frac{u^2}{r} \tan \phi \right\} - \dot{i} r^2 \Omega^2 \sin \phi \cos \phi
\end{aligned} \tag{25}$$

$$\left(\frac{D}{Dt} e \right)^* = \left(u \frac{D}{Dt} u \right)^* + \left(v \frac{D}{Dt} v \right)^* + \left(w \frac{D}{Dt} w \right)^* + gw \tag{26}$$

近似の前後で $r=a$ における $\vec{L}$ と e のラグランジュ微分が変化しないためには、(23)と(25)、(24)と(26)が $r=a$ において等しくなければならないから、

$$\frac{D}{Dt}u + 2\Omega w \cos\phi + \frac{uw}{r} = \left(\frac{D}{Dt}u\right)^* \quad (27)$$

$$\frac{D}{Dt}v + \frac{vw}{r} = \left(\frac{D}{Dt}v\right)^* \quad (28)$$

$$u\frac{D}{Dt}u + v\frac{D}{Dt}v + w\frac{D}{Dt}w = \left(u\frac{D}{Dt}u\right)^* + \left(v\frac{D}{Dt}v\right)^* + \left(w\frac{D}{Dt}w\right)^* \quad (29)$$

(27)～(29)より、

$$\left(\frac{D}{Dt}w\right)^* = \frac{D}{Dt}w - 2\Omega u \cos\phi - \frac{u^2 + v^2}{r} \quad (30)$$

(18)～(20)において $r = a$ として、(27)、(28)、(30)を代入すると、

$$\left(\frac{D}{Dt}u\right)^* = 2\Omega v \sin\phi + \frac{uv}{a} \tan\phi - \frac{1}{\rho} \frac{1}{a \cos\phi} \frac{\partial}{\partial\lambda} p + F_x \quad (31)$$

$$\left(\frac{D}{Dt}v\right)^* = -2\Omega u \sin\phi - \frac{u^2}{a} \tan\phi - \frac{1}{\rho} \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial\phi} p + F_y \quad (32)$$

$$\left(\frac{D}{Dt}w\right)^* = -g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial r} p + F_z \quad (33)$$

($\quad$)^{*}を消して、

$$\frac{D}{Dt}u = 2\Omega v \sin\phi + \frac{uv}{a} \tan\phi - \frac{1}{\rho} \frac{1}{a \cos\phi} \frac{\partial}{\partial\lambda} p + F_x \quad (34)$$

$$\frac{D}{Dt}v = -2\Omega u \sin\phi - \frac{u^2}{a} \tan\phi - \frac{1}{\rho} \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial\phi} p + F_y \quad (35)$$

$$\frac{D}{Dt}w = -g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial r} p + F_z \quad (36)$$

3 気圧座標

鉛直方向の運動に関して、微小体積の流体にはたらく気圧傾度力、つまり、下面と上面にはたらく気圧の差と、重力とがつりあっていると仮定する。このとき

$$p\delta x\delta y - \left(p + \frac{\partial p}{\partial z}\delta z\right)\delta x\delta y = \rho g\delta x\delta y\delta z \quad (1)$$

がなりたつ。ゆえに、

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \quad (2)$$

この関係を**静水圧平衡**という。(2)はナビエ・ストークスの方程式において $\vec{u} = \vec{0}$

を仮定したときの鉛直成分としても導くことができる。静水圧平衡のもとでは、気圧 p は高度 z に関して単調減少であり、気圧と高度の間に一対一の対応が成り立つ。したがって、鉛直方向の座標として高度 z の代わりに気圧 p を用いることができる。気圧 $p(x, y, z)$ は C^1 級(1回微分可能かつ1回微分が連続)の関数であり、(2)より $\partial p / \partial z \neq 0$ なので、陰関数定理¹より、

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{y,p} = -\frac{\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_{y,z}}{\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)_{x,y}} \quad (3)$$

ゆえに、

$$\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_{y,z} = -\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)_{x,y} \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{y,p} = \rho g \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{y,p} \quad (4)$$

同様に、

$$\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)_{x,z} = -\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)_{x,y} \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{x,p} = \rho g \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{x,p} \quad (5)$$

水平方向の運動方程式

$$\frac{D}{Dt}u = 2\Omega v \sin \phi + \frac{uv}{a} \tan \phi - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_{y,z} + F_x \quad (6)$$

$$\frac{D}{Dt}v = -2\Omega u \sin \phi - \frac{u^2}{a} \tan \phi - \frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial p}{\partial y} \right)_{x,z} + F_y \quad (7)$$

に(4)、(5)を代入して、

$$\frac{D}{Dt}u = 2\Omega v \sin \phi + \frac{uv}{a} \tan \phi - g \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_{y,p} + F_x \quad (8)$$

$$\frac{D}{Dt}v = -2\Omega u \sin \phi - \frac{u^2}{a} \tan \phi - g \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)_{x,p} + F_y \quad (9)$$

重力 $\vec{g}$ は万有引力と遠心力の合力だから保存力であり、ジオポテンシャル Φ を

導入して $\vec{g} = -\nabla \Phi$ と表せる。z 軸が $\vec{g}$ と平行な座標軸として定義されていて、

$g = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)_{x,y}$ であることを考慮すると、

$$g \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_{y,p} = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)_{x,y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_{y,p} = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_{y,p} \quad (10)$$

$$g \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)_{x,p} = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)_{x,y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)_{x,p} = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_{x,p} \quad (11)$$

式(10)と(11)を、(8)と(9)に代入して、

$$\frac{D}{Dt}u = 2\Omega v \sin \phi + \frac{uv}{a} \tan \phi - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_{y,p} + F_x \quad (12)$$

$$\frac{D}{Dt}v = -2\Omega u \sin \phi - \frac{u^2}{a} \tan \phi - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_{x,p} + F_y \quad (13)$$

気圧座標においては、ラグランジュ微分 $\frac{D}{Dt}$ は、

$$\frac{D}{Dt} \equiv \frac{\partial}{\partial t} + u \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)_p + v \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)_p + \omega \frac{\partial}{\partial p} \quad (14)$$

と定義される。 ω は気圧座標での鉛直速度であって、鉛直 p 速度と呼ばれる。

式(12)、(13)は、式(6)、(7)と等価であるが、鉛直座標として高度 z の代わりに気圧 p を用いている点で異なっている。このような座標を**気圧座標**または **p 座標**という。 p 座標では下向きが正である。また、水平方向の偏微分は、高度ではなく気圧を一定に保ちながら計算する点に注意が必要である。気象学では、理論上も実用上も鉛直座標として気圧 p を用いたほうが便利であることが多い。このため、 p 座標がしばしば用いられる。

さらに、地上気圧 p_s を用いて $p = p_s \sigma$ として、大気上端で $\sigma = 0$ 、地上で $\sigma = 1$ となるような座標系を定義することがある。これを **σ 座標**という。 σ 座標においては、 p 座標とは異なり、地上では常に $\sigma = 1$ で一定値となる。

¹ 二変数関数 $f(x, y)$ が C^1 級(1 回微分可能かつ 1 回微分が連続)の関数であり、

$$f(x, y) = a, \quad f_y(x, y) \neq 0$$

であるならば、関数 $y = g(x)$ が存在して、

$$g'(x) = -\frac{f_x(x, g(x))}{f_y(x, g(x))}$$

が成り立つ。

4 連続の式

ここでは、質量保存則を定式化する。3次元空間の中で固定された領域 V に含まれる空気の質量の時間変化は、その領域を出入りする正味の質量に等しいので、領域 V の境界を S 、外向きの単位法線ベクトルを $\vec{n}$ とすると、

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dv = - \int_S \rho \vec{u} \cdot \vec{n} ds \quad (1)$$

と書ける。ガウスの発散定理¹より、

$$\int_S \rho \vec{u} \cdot \vec{n} ds = \int_V \nabla \cdot (\rho \vec{u}) dv \quad (2)$$

なので、

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dv + \int_V \nabla \cdot (\rho \vec{u}) dv = 0 \quad (3)$$

と書ける。(3)は任意の領域 V について成り立つから、

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0 \quad (4)$$

となる。(4)は、任意の固定された微小な領域を出入りする質量が、その場所での密度の時間変化に等しいことを示している。(4)を変形して、

$$\frac{D}{Dt} \rho + \rho \nabla \cdot \vec{u} = 0 \quad (5)$$

と書くこともできる。局所直交座標系においては、(5)は、

$$\frac{D}{Dt} \rho + \rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0 \quad (6)$$

と表せる。

ここで、静水圧平衡を仮定すると、

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \quad (7)$$

だから、 z 座標系における鉛直速度 w と気圧座標（ p 座標）における鉛直速度 ω との関係は、

$$w = -\frac{1}{\rho g} \left\{ \omega - \left(\frac{\partial p}{\partial t} \right)_z - u \left(\frac{\partial p}{\partial x} \right)_z - v \left(\frac{\partial p}{\partial y} \right)_z \right\} \quad (8)$$

と表せる。また、2つの座標系における空間微分の関係は、

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_z = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_p - \frac{1}{\rho g} \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_z \frac{\partial}{\partial z} \quad (9)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_z = \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_p - \frac{1}{\rho g} \left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)_z \frac{\partial}{\partial z} \quad (10)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = -\rho g \frac{\partial}{\partial p} \quad (11)$$

となる。(7)～(11)を(6)に代入すると、

$$\begin{aligned} & \frac{D}{Dt} \rho + \rho \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_p + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_p - \frac{1}{\rho g} \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_z \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{1}{\rho g} \left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)_z \frac{\partial v}{\partial z} \right\} \\ & + \rho \left[\frac{\partial \omega}{\partial p} + \rho \left\{ \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{1}{\rho} \right) \right\} \omega + \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \frac{1}{\rho g} \left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)_z + \frac{1}{\rho g} u \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_z + \frac{1}{\rho g} v \left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)_z \right\} \right] = 0 \\ & \frac{D}{Dt} \rho + \rho \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_p + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_p + \frac{\partial \omega}{\partial p} \right\} \\ & + \rho^2 \omega \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{1}{\rho} \right) + \left\{ \left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)_z + u \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_z + v \left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)_z \right\} \frac{\rho}{g} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\rho} \right) \\ & + \frac{1}{g} \frac{\partial}{\partial z} \left\{ \left(\frac{\partial p}{\partial t}\right)_z + u \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_z + v \left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)_z \right\} - \frac{1}{\rho} \left\{ \frac{\partial u}{\partial z} \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_z + \frac{\partial v}{\partial z} \left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)_z \right\} = 0 \\ & \frac{D}{Dt} \rho + \rho \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_p + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_p + \frac{\partial \omega}{\partial p} \right\} - w \frac{\partial \rho}{\partial z} - \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)_z + u \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)_z + v \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)_z \right\} \rho = 0 \\ & \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_p + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_p + \frac{\partial \omega}{\partial p} = 0 \end{aligned} \quad (12)$$

等圧面上での発散を $\nabla_p \bullet \vec{u}_h$ で表せば、(12)は一般的な形として、

$$\nabla_p \bullet \vec{u}_h + \frac{\partial \omega}{\partial p} = 0 \quad (13)$$

と書ける²。

ここで、 σ 座標を導入し、地上気圧 p_s を用いて $p = p_s \sigma$ とすると、

$$\omega = \frac{D}{Dt}(p_s \sigma) = \sigma \left(\frac{\partial p_s}{\partial t} + \vec{u}_h \cdot \nabla p_s \right) + p_s \dot{\sigma} = 0 \quad (14)$$

と書ける。ただし、 $\dot{\sigma}$ は σ 座標における鉛直速度である。(14)を(13)に代入して、

$$\nabla_p \cdot \vec{u}_h + \frac{\partial \sigma}{\partial p} \left(\frac{\partial p_s}{\partial t} + \vec{u}_h \cdot \nabla p_s \right) + \sigma \left(\frac{\partial \vec{u}_h}{\partial p} \right) \cdot \nabla p_s + p_s \frac{\partial \dot{\sigma}}{\partial p} = 0 \quad (15)$$

$p = p_s \sigma$ より、

$$\frac{\partial}{\partial p} = \frac{1}{p_s} \frac{\partial}{\partial \sigma} \quad (16)$$

なので、

$$\frac{1}{p_s} \left(\frac{\partial p_s}{\partial t} + \vec{u}_h \cdot \nabla p_s \right) + \nabla_p \cdot \vec{u}_h + \sigma (\nabla p_s) \cdot \left(\frac{\partial \vec{u}_h}{\partial p} \right) + \frac{\partial \dot{\sigma}}{\partial p} = 0 \quad (17)$$

と変形できる。

$$\nabla_\sigma = \nabla_p + (\nabla_\sigma p) \frac{\partial}{\partial p} = 0 \quad (18)$$

を用いて、

$$\begin{aligned} \frac{1}{p_s} \left(\frac{\partial p_s}{\partial t} + \vec{u}_h \cdot \nabla p_s \right) + \nabla_\sigma \cdot \vec{u} + \frac{\partial \dot{\sigma}}{\partial \sigma} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial t} p_s + \nabla_\sigma \cdot (p_s \vec{u}_h) + p_s \frac{\partial \dot{\sigma}}{\partial \sigma} &= 0 \end{aligned} \quad (19)$$

(19)を $\sigma = 0$ から $\sigma = 1$ まで鉛直積分すると、 $\dot{\sigma} = 0$ ($\sigma = 0, 1$) を用いて、

$$\frac{\partial}{\partial t} p_s + \int_0^1 \nabla_\sigma \cdot (p_s \vec{u}_h) d\sigma = 0 \quad (20)$$

${}^1\vec{F}$ を 3 次元空間で定義された滑らかなベクトル場であるとする。3 次元空間において滑らかな境界を持つ領域 V に関して、領域 V の境界を S 、外向きの単位法線ベクトル

を $\vec{n}$ とすると、

$$\iiint_V \nabla \cdot \vec{F} dx dy dz = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} ds$$

ただし、 S は領域 V の境界、 $\vec{n}$ は外向きの単位法線ベクトルである。同様に、ストークスの定理は、

$$\iint_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{s} = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

である。ただし、 S は滑らかな境界をもつ曲面、 $\vec{s}$ は曲面上の単位法線ベクトル、 C は曲面 S の境界、 $\vec{l}$ は境界単位接線ベクトルである。

²(13)は、静水圧平衡が成り立つ状況のもとで質量保存則をあらためて考慮することによって、より簡単に導出することができる。しかし、ここまでの議論においては、静水圧平衡を仮定する前に一般的な質量保存則を(5)で表したのだから、(13)は(5)と静水圧平衡の(7)から数学的に導出されるべきである。

5 熱力学方程式

ここでは、大気が理想気体であることを仮定して、熱力学の第 1 法則を定式化する。理想気体の状態方程式は、圧力を p 、比容を α 、温度を T 、気体定数を R として、

$$p\alpha = RT \quad (1)$$

と書ける。乾燥空気に対しては $R = 287 \text{ J/kg K}$ である。熱力学の第 1 法則は、内部エネルギーを U 、気体に加えた熱を $d'Q$ 、気体が外部にした仕事を $d'W$ として、

$$d'Q = dU + d'W \quad (2)$$

と表せる。ここで、熱 Q と仕事 W の微小変化にプライムがついているのは、これらの量が状態量ではない、つまり、始点と終点を指定しただけでは変化量が決まらず、全微分可能ではないからである。(2)で、 $U = C_v T$ 、 $d'W = p d\alpha$ とすると、

$$d'Q = C_v dT + p d\alpha \quad (3)$$

と書ける。ただし、 C_v は乾燥空気の定積比熱である。(1)より、 $R dT = p d\alpha + \alpha dp$ なので、(3)は、

$$d'Q = (C_v + R) dT - \alpha dp = C_p dT - \alpha dp \quad (4)$$

と変形できる。ただし、 C_p は乾燥空気の定圧比熱である。(4)において、 $d'Q = 0$ とすると、

$$\begin{aligned} C_p dT - \alpha dp &= 0 \\ \frac{dT}{T} - \frac{R}{C_p} \frac{dp}{p} &= 0 \end{aligned} \quad (5)$$

となる。

ここで、温位 θ を

$$\theta = T \left(\frac{p}{p_0} \right)^{-\frac{R}{C_p}} \quad (6)$$

と定義すると、(5)が成り立つ条件のもとでは $d\theta = 0$ となる。つまり、 $d'Q = 0$ の

もとで θ は保存量である。

一般に、(6)において θ の微小変化量を計算すると、(4)を用いて、

$$\begin{aligned} d\theta &= \left(\frac{p}{p_0}\right)^{-\frac{R}{C_p}} dT - \frac{RT}{C_p p} \left(\frac{p}{p_0}\right)^{-\frac{R}{C_p}} dp = \frac{1}{C_p} \left(\frac{p}{p_0}\right)^{-\frac{R}{C_p}} (C_p dT - \alpha dp) \\ &= \frac{1}{C_p} \left(\frac{p}{p_0}\right)^{-\frac{R}{C_p}} d'Q \end{aligned} \quad (7)$$

となる。(7)より、

$$\frac{D}{Dt} \theta = \frac{\partial}{\partial t} \theta + \vec{u}_h \bullet \nabla_p \theta + \omega \frac{\partial}{\partial p} \theta = \frac{1}{C_p} \left(\frac{p}{p_0}\right)^{-\frac{R}{C_p}} Q \quad (8)$$

温位 θ を用いて、大気の静的安定度を評価することができる。乾燥大気の場合、 $\frac{\partial \theta}{\partial p} < 0$ または $\frac{\partial \theta}{\partial z} > 0$ であれば安定、 $\frac{\partial \theta}{\partial p} > 0$ または $\frac{\partial \theta}{\partial z} < 0$ であれば不安定である。

6 プリミティブ方程式系

これまでに導出した、運動方程式、連続の式、静水圧平衡の式、状態方程式、熱力学方程式を組み合わせることによって、大気の運動を記述する方程式系を構成することができる。つまり、第3章の(12)、(13)より、

$$\frac{D}{Dt}u = 2\Omega v \sin \phi + \frac{uv}{a} \tan \phi - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_{y,p} + F_x \quad (1)$$

$$\frac{D}{Dt}v = -2\Omega u \sin \phi - \frac{u^2}{a} \tan \phi - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_{x,p} + F_y \quad (2)$$

第4章の(13)より、

$$\nabla_p \bullet \vec{u}_h + \frac{\partial \omega}{\partial p} = 0 \quad (3)$$

第3章の課題3.2より、

$$\frac{\partial \Phi}{\partial p} = -\alpha \quad (4)$$

第5章の(1)より、

$$p\alpha = RT \quad (5)$$

第5章の(8)より、

$$\frac{D}{Dt}\theta = \frac{1}{C_p} \left(\frac{p}{p_0} \right)^{-\frac{R}{C_p}} Q \quad (6)$$

以上(1)～(6)の方程式系においては、東西、南北、鉛直方向の速度(u, v, ω)、ジオポテンシャル Φ 、比容 α 、温位 θ の6つの変数に対して、6つの方程式が存在していて、閉じた方程式系になっていることが分かる。この方程式系を**プリミティブ方程式系**という。地球の中緯度大気においては、

$$\frac{\left| \frac{u}{a} \tan \phi \right|}{|2\Omega \sin \phi|} \ll 1 \quad (7)$$

が成り立つので、(1)、(2)は次のように書くことができる¹。

$$\frac{D}{Dt}u = 2\Omega v \sin \phi - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)_{y,p} + F_x \quad (8)$$

$$\frac{D}{Dt}v = -2\Omega u \sin \phi - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)_{x,p} + F_y \quad (9)$$

¹ 準地衡方程式系を導出する場合には、ロスビー数 R_o の 0 次と 1 次の量に注目する。このような場合に(1)、(2)の右辺第 2 項を無視するためには、右辺第 2 項と第 1 項の比が R_o の 2 乗かそれよりも高次でなければならない。つまり、

$$\frac{\left| \frac{u}{a} \tan \phi \right|}{|2\Omega \sin \phi|} \leq R_o^2$$

が満たされなければならない。地球の中緯度大気においては、上式の値は $10^{-2} \approx R_o^2$ である。