９　定常ロスビー波（３）

９．１　地形による強制

気候平均場で現れるような、定常的なロスビー波は、おもに、チベット高原やロッキー山脈のような大規模な山岳による地形の効果と、海と陸の温度差による熱強制の効果によって励起されている。ここでは、地形による定常的なロスビー波の励起について、強制項を伴う渦度方程式を用いて調べる。

第７章の[1]では、プリミティブ方程式系より、渦度方程式を

$$\frac{D}{Dt}\xi+\beta v=-(f+\xi)\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right) \qquad [1]$$

と書いた。連続の式より

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial \omega}{\partial p}=0 \qquad [2]$$

だから、[1]は

$$\frac{D}{Dt}\xi+\beta v=(f+\xi)\frac{\partial \omega}{\partial p} \qquad [3]$$

と書くこともできる。

ここで、地形による渦度の強制を考える。大気上端 $p=0$ では $\omega=0$ 、大気下端 $p=p_0$ では、 $\omega=\omega_s=\vec{u}\cdot\nabla p_s$ とする。ただし、 p_s は地表面気圧、 p_0 は p_s の代表値である。このとき、 $\frac{\partial \omega}{\partial p}$ が高度によらず一定とすれば

$$\frac{\partial \omega}{\partial p}=\frac{\omega_s}{p_0}=\frac{\vec{u}\cdot\nabla p_s}{p_0}$$

である。大気のスケールハイトを H 、地表面の標高を h とおいて

$$\frac{p_s-p_0}{p_0}=-\frac{h}{H}$$

とすると、

$$\frac{\partial \omega}{\partial p}=-\frac{\vec{u}\cdot\nabla h}{H} \qquad [4]$$

となる。これを[3]に代入すると、

$$\frac{D}{Dt}\xi+\beta v=-\frac{f+\xi}{H}\vec{u}\cdot\nabla h \qquad [5]$$

が得られる。

次に、基本場には、南北風がなく、西風 U が定常かつ東西方向には一様に吹いているとし、さらに、微小振幅を仮定して線形化する。[5]の右辺において、

$$f+\xi\simeq f$$

$$\vec{u}\cdot\nabla\simeq U\frac{\partial}{\partial x}$$

であることに注意すると、[5]は

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+U\frac{\partial}{\partial x}\right)\xi+\hat{\beta}v=-\frac{fU}{H}\frac{\partial}{\partial x}h \qquad [6]$$

と書ける。[6]において、地表面との摩擦による渦の減衰の効果を考慮に入れると、

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+U\frac{\partial}{\partial x}\right)\xi+\hat{\beta}v=-\frac{fU}{H}\frac{\partial}{\partial x}h-\frac{\xi}{\tau} \qquad [7]$$

となる。τ は減衰の時間スケールである。流線関数 ψ を用いれば、[7]は

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+U\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\psi+\hat{\beta}\frac{\partial}{\partial x}\psi=-\frac{fU}{H}\frac{\partial}{\partial x}h-\frac{1}{\tau}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\psi \qquad [8]$$

と表すこともできる。これが、東西一様な西風場における、地形による強制の効果を含んだ渦度方程式である。さらに、定常を仮定すれば、

$$U\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\psi+\hat{\beta}\frac{\partial}{\partial x}\psi=-\frac{fU}{H}\frac{\partial}{\partial x}h-\frac{1}{\tau}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\psi \qquad [9]$$

が得られる。

[9]において、与えられた地形 h に対する流線関数 ψ を求めてみる。簡単のため、ψ は南北一様と仮定する。

$$U\frac{\partial^3}{\partial x^3}\psi+\hat{\beta}\frac{\partial}{\partial x}\psi=-\frac{fU}{H}\frac{\partial}{\partial x}h-\frac{1}{\tau}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\psi \qquad [10]$$

ここで、波数 k の東西方向に波型の地形を考えて、

$$\begin{aligned}\psi&=\Re\,\hat{\psi}\exp[ikx]\\ h&=\Re\,\hat{h}\exp[ikx]\end{aligned} \qquad [11]$$

とおく。$\hat{\psi}$ 、$\hat{h}$ は定数である。[11]を[10]に代入すると、

$$-ik^3U\hat{\psi}+ik\hat{\beta}\hat{\psi}=-ik\frac{fU}{H}\hat{h}+k^2\frac{1}{\tau}\hat{\psi}$$

$$\left(k^2U-\hat{\beta}-i\frac{k}{\tau}\right)\hat{\psi}=\frac{fU}{H}\hat{h}$$

となって、

$$\hat{\psi}=\frac{1}{k^2U-\hat{\beta}-i\dfrac{k}{\tau}}\frac{fU}{H}\hat{h} \qquad [12]$$

が得られる。[12]は地形による強制に対する渦度場の応答を表している。

[12]において、τ が十分に大きく、減衰の効果は小さいとする。地形の東西波数 k が定常ロスビー波の東西波数 $\dfrac{U}{\hat{\beta}}$ よりも大きいとき、[12]は

$$\hat{\psi}\simeq\frac{1}{k^2U-\hat{\beta}}\frac{fU}{H}\hat{h}$$

となり、$\hat{h}$ と $\hat{\psi}$ は同符号となる。これは、標高の高い場所で高気圧性の渦になることを

示している。逆に、k が $\dfrac{U}{\hat{\beta}}$ よりも小さいとき、[12]は

$$\hat{\psi} \simeq -\frac{1}{\hat{\beta}-k^2 U}\frac{fU}{H}\hat{h}$$

となり、$\hat{h}$ と $\hat{\psi}$ は逆符号となる。これは、標高の高い場所で低気圧性の渦になることを示している。k が $\dfrac{U}{\hat{\beta}}$ にほぼ等しい値をもつとき、つまり、地形の波数が定常ロスビー波の波数にほぼ等しいときには、[12]において、k と $\dfrac{U}{\hat{\beta}}$ が互いに相殺して、

$$\hat{\psi} \simeq i\frac{\tau}{k}\frac{fU}{H}\hat{h}$$

となり、$\hat{\psi}$ の絶対値は非常に大きくなる。また、$\hat{h}$ と $\hat{\psi}$ は位相が 90 度ずれる。渦度方程式[10]においては、左辺の第 1 項（東西移流項）と第 2 項（ベータ項）の和がほぼゼロとなり、右辺の第 1 項（強制項）と第 2 項（減衰項）がたがいに相殺している。これは共鳴の状態である。このように、地形の水平スケールが定常ロスビー波の水平スケールに近いときには、振幅の大きな応答が現れる。