

## 8 定常ロスビー波（2）

### 8. 1 光線理論

定常ロスビー波のエネルギーの伝播経路を考えよう。定常ロスビー波の位相は時間変化しないので、角振動数 $\omega$  はゼロである。したがって、波動の特性を決める変数は東西波数 $k$ と南北波数 $l$ の2つである。第7章の[8]によって $k$ と $l$ が満たすべき条件がひとつ与えられるが、これだけでは、 $k$ と $l$ の値の両方を決定することはできない。そこで、定常ロスビー波束の伝播にともなう、東西波数 $k$ と南北波数 $l$ が、第7章の[8]を満たしながらどう変化していくか検討する。

基本場の状態を決める変数である $\hat{\beta}$ と $U$ は、一般に、南北方向には変化するが東西方向にはあまり変化しない。そこで、以下では、 $\hat{\beta}$ と $U$ が東西方向には一様であると仮定する。波束の伝播に乗って観測した場合のラグランジュ微分は、

$$\frac{D_g}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + c_{gx} \frac{\partial}{\partial x} + c_{gy} \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial \omega}{\partial k} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial \omega}{\partial l} \frac{\partial}{\partial y} \quad [13]$$

と書ける。ここで、波束の伝播に乗って観測した東西波数 $k$ の時間変化を考える。

$$\frac{D_g}{Dt} k = \frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial \omega}{\partial k} \frac{\partial k}{\partial x} + \frac{\partial \omega}{\partial l} \frac{\partial k}{\partial y} \quad [14]$$

ここで、波の位相を $\theta$ としたとき、角振動数や波数の定義から、

$$\omega = - \frac{\partial \theta}{\partial t}$$

$$k = \frac{\partial \theta}{\partial x}$$

であることに注意すると、

$$\frac{\partial k}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial t} = - \frac{\partial \omega}{\partial x} \quad [15]$$

$$\frac{\partial k}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\partial l}{\partial x} \quad [16]$$

である。[14]に代入すると、

$$\frac{D_g}{Dt} k = - \frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{\partial \omega}{\partial k} \frac{\partial k}{\partial x} + \frac{\partial \omega}{\partial l} \frac{\partial l}{\partial x}$$

が得られる。 $\omega = \omega(\hat{\beta}, U, k, l)$ であることを考慮して、偏微分において固定する変数を明示的に書けば、

$$\frac{D_g}{Dt} k = - \frac{\partial \omega}{\partial x} + \left( \frac{\partial \omega}{\partial k} \right)_{\hat{\beta}, U, l} \frac{\partial k}{\partial x} + \left( \frac{\partial \omega}{\partial l} \right)_{\hat{\beta}, U, k} \frac{\partial l}{\partial x} \quad [17]$$

となる。ここで、一般に

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} = \left( \frac{\partial \omega}{\partial \hat{\beta}} \right)_{U, k, l} \frac{\partial \hat{\beta}}{\partial x} + \left( \frac{\partial \omega}{\partial U} \right)_{\hat{\beta}, k, l} \frac{\partial U}{\partial x} + \left( \frac{\partial \omega}{\partial k} \right)_{\hat{\beta}, U, l} \frac{\partial k}{\partial x} + \left( \frac{\partial \omega}{\partial l} \right)_{\hat{\beta}, U, k} \frac{\partial l}{\partial x} \quad [18]$$

である。[18]を[17]に代入すると、

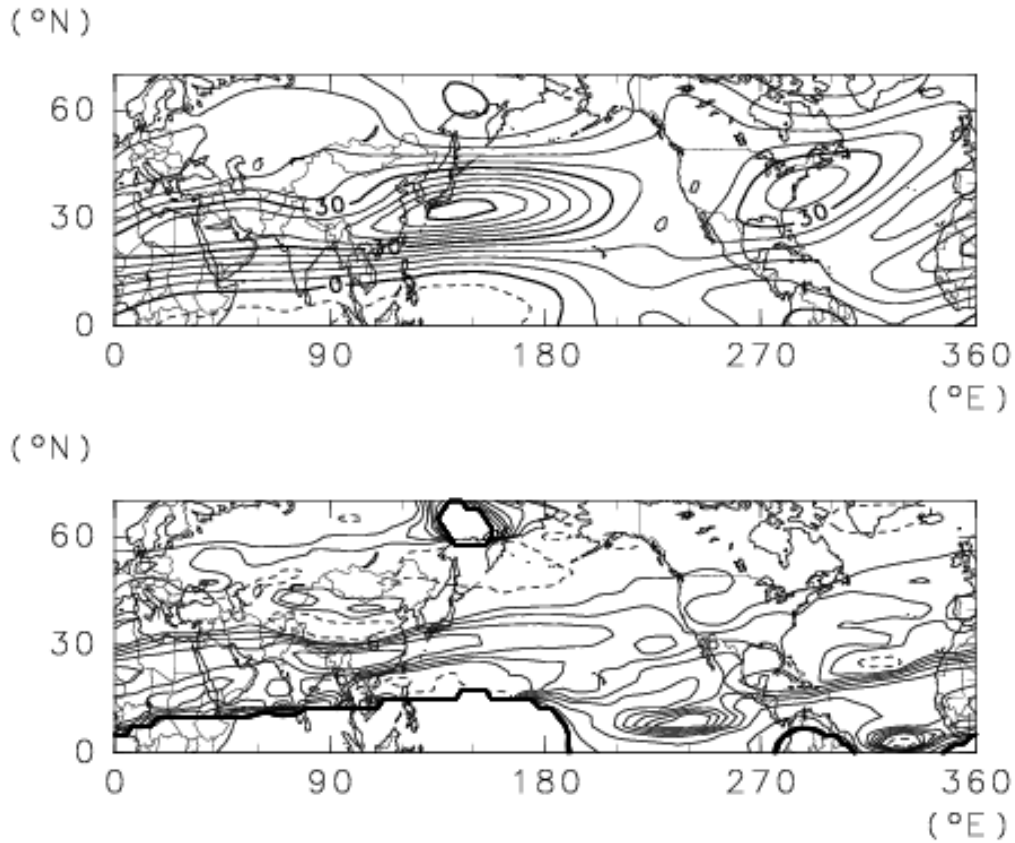
$$\frac{D_g}{Dt}k = \left( \frac{\partial \omega}{\partial \hat{\beta}} \right)_{U,k,l} \frac{\partial \hat{\beta}}{\partial x} + \left( \frac{\partial \omega}{\partial U} \right)_{\hat{\beta},k,l} \frac{\partial U}{\partial x} \quad [19]$$

が得られる。したがって、 $\hat{\beta}$  と  $U$  が東西方向には一様であれば、

$$\frac{D_g}{Dt}k = 0 \quad [20]$$

が成り立つ。つまり、基本場が東西方向に一様であれば、東西波数は波束の伝播に沿って一定である。

定常ロスビー波束が南北方向に伝播すれば、一般に、定常ロスビー波の全波数  $K = \sqrt{k^2 + l^2}$  は変化する。しかし、東西波数  $k$  は変化しないのだから、結局、全波数  $K$  が変化したら、南北波数  $l$  を変化させるしかない。全波数  $K$  が東西波数  $k$  よりも大きければ、 $l$  が実数解を持ち、波束として伝播することができる。しかし、全波数  $K$  が東西波数  $k$  よりも小さくなると、 $l$  が実数解を持たず、伝播することができなくなる。南北方向に比較的狭い領域で東西風  $U$  が大きいと、 $U_{yy}$  が絶対値の大きい負の値を持つので、 $\hat{\beta}$  が大きくなり、 $K$  も大きな値を持つ。南北方向に狭い領域で全波数  $K$  の値が大きいと、与えられた東西波数  $k$  の値によっては、その狭い領域だけで定常ロスビー波束としての伝播が可能となる。このような領域を**導波管**(waveguide)とよぶことがある。



(NCEP/NCAR の客観解析データを用いて作成)

300hPa 面での東西風 [m/s] (上) と  $K$  (下) (1月の月平均場)

$K$  はその緯度での緯度円の半径で規格化、0を点線、4、5、6、7、8、10、15を  
実線で表示、東風領域との境界は太線。

## 8. 2 波活動度フラックス

定常ロスビー波は、位相は動かないが、エネルギーは伝播している。したがって、定常ロスビー波のエネルギーの伝播の定量的な評価は重要である。しかし、定常ロスビー波に関して、波動のエネルギーを適切に定義することは困難である。なぜなら、ロスビー波の節の部分には運動エネルギーが存在するが、腹の部分ではエネルギーに相当する物理量を定義することが難しいからである。そこで、エネルギーに相当する物理量の流れ（フラックス）として、次の条件を満たすベクトル量を新たに定義することにする。

1. 群速度ベクトルに平行である。
2. 大きさは、波動の振幅の2乗に比例する。
3. 位相依存性がない。つまり、波動の節の部分と腹の部分を通して滑らかな定義できる。

これらの定義を満たすフラックス  $\vec{F} = (F_x, F_y)$  として、

$$F_x = \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 - \psi \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right\} \quad [21]$$

$$F_y = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} - \psi \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right) \quad [22]$$

を考えることができる<sup>2,3</sup>。実際に、平面波  $\psi = \text{Re} \hat{\psi} \exp[i(kx + ly - \omega t)]$  に対して、

$$F_x = \frac{1}{2} k^2 |\hat{\psi}|^2$$

$$F_y = \frac{1}{2} kl |\hat{\psi}|^2$$

であり、上の3つの条件を満たしている。[21]、[22]で定義されるベクトル量を**波活動度フラックス(wave activity flux)**という。傾圧不安定波のような移動性じょう乱よりも長い時間スケールの変動を考えるとときには、定常ロスビー波が重要になるが、波活動度フラックスを用いてロスビー波の伝播を評価することがある。

[21]、[22]は、基本場が東西一様で東西風のみが吹いている状況のもとでの波活動度フラックスである。基本場が東西非一様で、南北風  $V$  も存在する場合には、[21]、[22]を拡張して、

$$F_x = \frac{1}{2|\vec{U}|} \left[ U \left\{ \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 - \psi \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right\} + V \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} - \psi \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right) \right] \quad [23]$$

$$F_y = \frac{1}{2|\vec{U}|} \left[ U \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} - \psi \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right) + V \left\{ \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 - \psi \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} \right\} \right] \quad [24]$$

とする。ただし、 $|\vec{U}| = \sqrt{U^2 + V^2}$  である。

実際に波活動度フラックスを計算するときには、基本場を定義する必要がある。もっとも単純には、気候平均場の東西風をさらに東西平均した場を基本場とし、そこからの偏差をじょう乱場とすることが考えられる。この場合は、[21]、[22]を用いればよい。気候変動を考えるとときには、（東西非一様性を含む）気候平均場の風を基本場とし、そこからの偏差をじょう乱場と定義することが多い。この場合は、[23]、[24]を用いる。

波活動度フラックスは、厳密には準地衡方程式系において定義されている。したがって、水平面とは等圧面のことであり、また、基本場の風としては、実際の平均風そのものではなく、非発散の地衡風を用いるのが正確である。

<sup>1</sup>球面座標系においては、

$$\hat{\beta} = \beta - \frac{1}{a^2} \frac{\partial}{\partial \phi} \left( \frac{1}{\cos \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \right) (U \cos \phi)$$

となる。ただし、 $a$  は地球半径、 $\phi$  は緯度である。右辺第2項は基本場の相対渦度の南北微分である。やや複雑であるが、球面座標上の微小領域での相対渦度をストークスの定理によって定義することを考えると理解しやすい。このように定義した  $\hat{\beta}$  を用いて、定常ロスビー波の全波数を以下のように書くことができる。

$$K = \sqrt{\frac{\hat{\beta}}{U}}(r \cos \phi)$$

波数は1メートルを基準とするより、その緯度での緯度線の半径 $r \cos \phi$ を基準としたほうが扱いやすいので、ここでは、 $r \cos \phi$ をかけている。

<sup>2</sup>球面座標系においては、

$$F_x = \frac{\cos \phi}{2|\vec{U}|} \left[ \frac{U}{a^2 \cos^2 \phi} \left\{ \left( \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} \right)^2 - \psi \frac{\partial^2 \psi}{\partial \lambda^2} \right\} + \frac{V}{a^2 \cos \phi} \left( \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} \frac{\partial \psi}{\partial \phi} - \psi \frac{\partial^2 \psi}{\partial \lambda \partial \phi} \right) \right]$$

$$F_y = \frac{\cos \phi}{2|\vec{U}|} \left[ \frac{U}{a^2 \cos \phi} \left( \frac{\partial \psi}{\partial \lambda} \frac{\partial \psi}{\partial \phi} - \psi \frac{\partial^2 \psi}{\partial \lambda \partial \phi} \right) + \frac{V}{a^2} \left\{ \left( \frac{\partial \psi}{\partial \phi} \right)^2 - \psi \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} \right\} \right]$$

となる。ただし、 $a$ は地球半径、 $\phi$ は緯度である。緯度方向のスケールの整合性のため、 $\cos \phi$ をかけている。

<sup>3</sup>3次元に拡張して考えることもできる。その場合、 $\vec{F} = (F_x, F_y, F_z)$ は

$$F_x = \frac{P}{2} \left\{ \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 - \psi \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right\}$$

$$F_y = \frac{P}{2} \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} - \psi \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right)$$

$$F_z = \frac{P}{2} \left\{ \frac{f_0^2}{N^2} \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial z} - \psi \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial z} \right) \right\}$$

となる。ただし、 $f_0$ は基準緯度におけるコリオリ係数、 $N$ はブラント・ヴァイサラ振動数である。3次元で取り扱うときには、鉛直方向のスケールの整合性のため、気圧 $P$ をかける。2次元（等圧面上）で示すときには $P$ をかけないで示すことが多い。

## 補遺 波活動度フラックスの導出

渦度方程式は

$$\frac{D}{Dt}\xi = -\hat{\beta}\psi_x + s \quad [1]$$

と書ける。基本場においては東西一様な東西風のみが吹いているものとする。さらに微小振幅を仮定しているので、

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x}$$

である。 $s$ は外部強制による渦度の生成、消滅を表す。両辺に $\xi$ をかけると、

$$\begin{aligned} \xi \frac{D}{Dt}\xi &= -\hat{\beta}\xi\psi_x + s\xi \\ \frac{D}{Dt}\left(\frac{\xi^2}{2}\right) &= -\hat{\beta}\xi\psi_x + s\xi \end{aligned} \quad [2]$$

となる。両辺を $\hat{\beta}$ で割ると、

$$\frac{D}{Dt}\left(\frac{\xi^2}{2\hat{\beta}}\right) = -\psi_x\xi + \frac{s\xi}{\hat{\beta}} \quad [3]$$

微小振幅においては、 $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x}$  だから、

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\xi^2}{2\hat{\beta}}\right) = -\psi_x\xi - \frac{U}{2\hat{\beta}}(\xi^2)_x + \frac{s\xi}{\hat{\beta}} \quad [4]$$

が得られる。ここで、定常ロスビー波を仮定しているので、[1]で時間微分をゼロとして、

$$U \frac{\partial}{\partial x}\xi = -\hat{\beta}\psi_x + s \quad [5]$$

と書ける。 $s = \frac{\partial}{\partial x}r$ と定義すれば、

$$\frac{\partial}{\partial x}(U\xi) = \frac{\partial}{\partial x}(-\hat{\beta}\psi + r)$$

となる。 $x$ について積分すれば、

$$U\xi = -\hat{\beta}\psi + r + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

となるが、両辺とも偏差量であり、東西平均はゼロになるから、

$$U\xi = -\hat{\beta}\psi + r \quad [6]$$

と表せる。[6]を[4]に代入すると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\xi^2}{2\hat{\beta}}\right) &= -\psi_x\xi - \frac{1}{2\hat{\beta}}\{(-\hat{\beta}\psi + r)\xi\}_x + \frac{s\xi}{\hat{\beta}} \\ \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\xi^2}{2\hat{\beta}}\right) &= -\psi_x\xi + \frac{1}{2}(\psi\xi)_x - \frac{1}{2\hat{\beta}}(r\xi)_x + \frac{s\xi}{\hat{\beta}} \end{aligned} \quad [7]$$

が得られる。 $\xi = \psi_{xx} + \psi_{yy}$ を代入して、

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\xi^2}{2\hat{\beta}}\right) &= -\psi_x(\psi_{xx}+\psi_{yy})+\frac{1}{2}\left\{\psi(\psi_{xx}+\psi_{yy})\right\}_x-\frac{1}{2\hat{\beta}}(r\xi)_x+\frac{s\xi}{\hat{\beta}} \\ \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\xi^2}{2\hat{\beta}}\right) &= -\psi_x\psi_{xx}+\frac{1}{2}(\psi\psi_{xx})_x-\psi_x\psi_{yy}+\frac{1}{2}(\psi\psi_{yy})_x-\frac{1}{2\hat{\beta}}(r\xi)_x+\frac{s\xi}{\hat{\beta}}\end{aligned}$$

となる。ここで、

$$\psi_x\psi_{xx}=\frac{1}{2}(\psi\psi_x)_x$$

を用いると、

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\xi^2}{2\hat{\beta}}\right)=-\frac{1}{2}(\psi_x\psi_x)_x+\frac{1}{2}(\psi\psi_{xx})_x-\psi_x\psi_{yy}+\frac{1}{2}(\psi\psi_{yy})_x-\frac{1}{2\hat{\beta}}(r\xi)_x+\frac{s\xi}{\hat{\beta}}$$

となつて、

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\xi^2}{2\hat{\beta}}\right)=-\frac{1}{2}(\psi_x\psi_x)_x+\frac{1}{2}(\psi\psi_{xx})_x-\frac{1}{2}\psi_x\psi_{yy}+\frac{1}{2}\psi\psi_{xyy}-\frac{1}{2\hat{\beta}}(r\xi)_x+\frac{s\xi}{\hat{\beta}}$$

が得られる。さらに、

$$\begin{aligned}\psi_x\psi_{yy} &= (\psi_x\psi_y)_y-\psi_{xy}\psi_y \\ \psi\psi_{xyy} &= (\psi\psi_{xy})_y-\psi_{xy}\psi_y\end{aligned}$$

を用いると、

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\xi^2}{2\hat{\beta}}\right) &= -\frac{1}{2}(\psi_x\psi_x)_x+\frac{1}{2}(\psi\psi_{xx})_x-\frac{1}{2}(\psi_x\psi_y)_y+\frac{1}{2}\psi_{xy}\psi_y+\frac{1}{2}(\psi\psi_{xy})_y-\frac{1}{2}\psi_{xy}\psi_y \\ &\quad -\frac{1}{2\hat{\beta}}(r\xi)_x+\frac{s\xi}{\hat{\beta}} \\ \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\xi^2}{2\hat{\beta}}\right) &= -\frac{1}{2}(\psi_x\psi_x)_x+\frac{1}{2}(\psi\psi_{xx})_x-\frac{1}{2}(\psi_x\psi_y)_y+\frac{1}{2}(\psi\psi_{xy})_y-\frac{1}{2\hat{\beta}}(r\xi)_x+\frac{s\xi}{\hat{\beta}}\end{aligned}\tag{8}$$

が得られる。波活動度フラックス  $\vec{F}=(F_x, F_y)$  を

$$F_x=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2-\psi\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\right\}\tag{9}$$

$$F_y=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial y}-\psi\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y}\right)\tag{10}$$

と定義すると、[8]は

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\xi^2}{2\hat{\beta}}\right)=-\nabla_p\cdot\vec{F}-\frac{1}{2\hat{\beta}}(r\xi)_x+\frac{s\xi}{\hat{\beta}}\tag{11}$$

と表せる。

**参考文献：**

- Hoskins, B. J., and T. Ambrizzi, 1993: Rossby wave propagation on a realistic longitudinally varying flow. *J. Atmos. Sci.*, **50**, 1661-1671.
- James, I. N., 1994: *Introduction to Circulating Atmospheres*. Cambridge Univ. Press, 422pp.
- Plumb, R. A., 1985: On the three-dimensional propagation of stationary waves. *J. Atmos. Sci.*, **42**, 217-229.
- Takaya, K., and H. Nakamura, 2001: A formulation of a phase-independent wave-activity flux for stationary and migratory quasigeostrophic eddies on a zonally varying basic flow. *J. Atmos. Sci.*, **58**, 608-627.