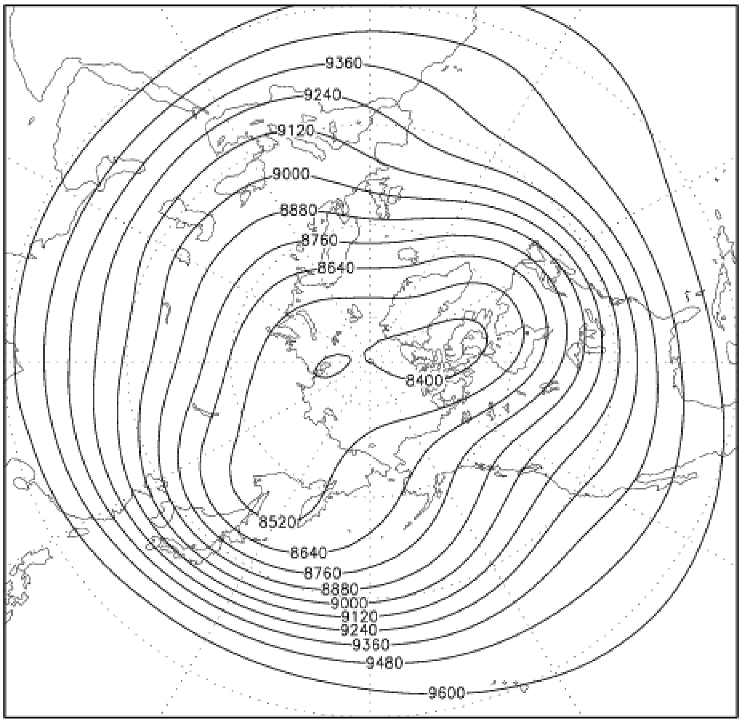
７　定常ロスビー波（１）

中高緯度の対流圏の大気の運動を傾圧不安定波の時間スケールよりもじゅうぶんに長い時間で時間平均すると、下の図のように、偏西風が波を打ち、南北に蛇行していることがわかる。傾圧不安定波の波長は数千ｋｍ程度であるが、それと比べると、かなり長い波長を持っていることもわかる。これは、数日程度の周期をもつ傾圧不安定波とは異なる定常性の波動が存在することを意味している。このような波動は、**定常ロスビー波**(stationary Rossby wave)とよばれている。ここでは、渦度方程式を用いて、中高緯度の大気でみられる定常性の波動の性質を調べる。



（NCEP/NCAR の客観解析データを用いて作成）

定常ロスビー波の例（１月の月平均 300hPa 高度場［m］）

７．１　渦度方程式

プリミティブ方程式系において、傾斜項と粘性項を無視すると、相対渦度

$$\xi = \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}$$

の時間変化を表す渦度方程式

$$\frac{D}{Dt}\xi + \beta v = -(f+\xi)\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\right) \qquad [1]$$

が導かれる。ただし、f はコリオリ係数、β は $\beta = \frac{df}{dy}$ である。ここで、水平風が発散成分を含まない、つまり、

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

と仮定する。このとき、水平風(u,v)は流線関数Ψを用いて、

$$u=-\frac{\partial \Psi}{\partial y}, v=\frac{\partial \Psi}{\partial x} \qquad [2]$$

と表すことができ、相対渦度ξは、

$$\xi=\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\Psi \qquad [3]$$

と書ける。したがって、[1]は

$$\frac{D}{Dt}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\Psi+\beta\frac{\partial}{\partial x}\Psi=0 \qquad [4]$$

と表せる。

中緯度の対流圏では西風が卓越する。そこで、基本場には、南北風がなく、西風Uが定常かつ東西方向には一様に吹いているとする。つまり、基本場の風速は$(U(y),0)$であるとする。このような基本場の中で、風速のじょう乱成分(u',v')を考える。流線関数Ψも同様に、基本場の流線関数Ψ_0とじょう乱成分ψに分けて、$\Psi=\Psi_0+\psi$と書ける。また、ラグランジュ微分は、

$$\frac{D}{Dt}=\frac{\partial}{\partial t}+(U+u')\frac{\partial}{\partial x}+v'\frac{\partial}{\partial y}$$

と表すことができる。このとき、[4]は

$$\left\{\frac{\partial}{\partial t}+(U+u')\frac{\partial}{\partial x}+v'\frac{\partial}{\partial y}\right\}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(\Psi_0+\psi)+\beta\frac{\partial}{\partial x}(\Psi_0+\psi)=0$$

と書ける。基本場は時間変化がなく、また、南北風はないので、Ψ_0はyのみの関数である。このことを考慮すると、

$$\left\{\frac{\partial}{\partial t}+(U+u')\frac{\partial}{\partial x}+v'\frac{\partial}{\partial y}\right\}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\psi+v'\frac{d^3}{dy^3}\Psi_0+\beta\frac{\partial}{\partial x}\psi=0$$

が得られる。じょう乱成分が微小の場合には、

$$\left(u'\frac{\partial}{\partial x}+v'\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\psi$$

のような、じょう乱について２次の項は、他の項に比べてじゅうぶんに小さいので無視できて、

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+U\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\psi+v'\frac{d^3}{dy^3}\Psi_0+\beta\frac{\partial}{\partial x}\psi=0$$

となる。したがって、

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+U\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\psi+(\beta-U_{yy})\frac{\partial}{\partial x}\psi=0$$

が得られる。ここで、実効ベータ$\hat{\beta}$を$\hat{\beta}=\beta-U_{yy}$とおけば、

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+U\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\psi+\hat{\beta}\frac{\partial}{\partial x}\psi=0 \qquad [5]$$

と書ける。

７．２　分散関係式

どのような型のじょう乱が[5]をみたすか考える。[5]において、波型の解を仮定して、

$$\psi = \mathrm{Re}\hat{\psi}\exp[i(kx+ly-\omega t)] \qquad [6]$$

とおく。$\hat{\psi}$ は定数であり、ω は**角振動数**(angular frequency)、k は**東西波数**(zonal wavenumber)、l は**南北波数**(meridional wavenumber)である。次に、[6]を[5]に代入して、ω と k 、l との関係を求める。$\frac{\partial}{\partial t}$ は $-i\omega$ に、$\frac{\partial}{\partial x}$ は ik に、$\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ は $-k^2$ に、$\frac{\partial^2}{\partial y^2}$ は $-l^2$ に置きかえることができるから、

$$(\omega-Uk)(k^2+l^2)+\hat{\beta}k=0$$

つまり、

$$\omega = Uk-\frac{\hat{\beta}k}{k^2+l^2} \qquad [7]$$

が得られる。このように、波動の角振動数を波数の関数として表した式を、**分散関係式**(dispersion relationship)という。定常解、つまり位相速度 $\frac{\omega}{k}$ がゼロである解を考えて、$\frac{\omega}{k}=0$ とすると、

$$K^2 = k^2+l^2 = \frac{\hat{\beta}}{U} \qquad [8]$$

となる。ただし、K は**全波数**(total wavenumber) $K=\sqrt{k^2+l^2}$ である[1]。このような条件を満たす波動を定常ロスビー波とよぶ。[8]は、定常ロスビー波の全波数が実効ベータ $\hat{\beta}$ と東西風 U によって決まることを示している。中高緯度の大気の運動をじゅうぶんに長い時間で時間平均すると、[8]をみたすような定常ロスビー波を検出することができる。

７．３　群速度

ここで、定常ロスビー波にともなう**波束**(wave packet)の伝播速度を考える。一般に、波束の伝播速度は**群速度**(group velocity)で表される。波束の伝播速度は、波動の振幅が大きくなっている部分が移動していく速度のことであり、波動のエネルギーの伝播速度とみなすことができる。群速度ベクトル $\vec{c}_g=(c_{gx},c_{gy})$ は、一般には

$$c_{gx}=\frac{\partial\omega}{\partial k} \qquad [9]$$

$$c_{gy}=\frac{\partial\omega}{\partial l} \qquad [10]$$

と定義される。定常ロスビー波の分散関係式[7]に対して、群速度の x 成分 c_{gx} を計算する

と、

$$c_{gx} = \frac{\partial \omega}{\partial k} = U - \frac{\hat{\beta}\left(l^2 - k^2\right)}{\left(k^2 + l^2\right)^2}$$

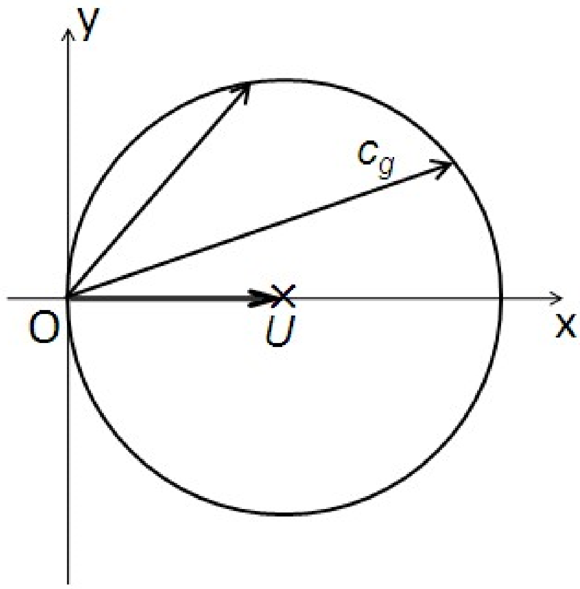
となる。さらに、[8]を適用すると、

$$c_{gx} = \frac{2\hat{\beta} k^2}{\left(k^2 + l^2\right)^2} \qquad [11]$$

が得られる。同様に、群速度のy成分c_{gy}は、

$$c_{gy} = \frac{2\hat{\beta} kl}{\left(k^2 + l^2\right)^2} \qquad [12]$$

である。定常ロスビー波の場合、波数ベクトル$\vec{k} = (k,l)$と群速度ベクトル$\vec{c}_g = \left(c_{gx}, c_{gy}\right)$は平行である。つまり、波面の向いている方向にエネルギーが伝播していく。また、東西風Uと群速度ベクトル$\vec{c}_g$との関係は下の図のようになる。



定常ロスビー波の群速度ベクトル

群速度の東西成分c_{gx}は、東西風Uの０～２倍の範囲の値をとることがわかる。

補遺　位相速度と群速度

波の位相が進行する速度を位相速度という。kを東西波数、ωを角振動数とすると、波の位相θは、時刻t、東西座標xにおいては

$$\theta=\theta_0+kx-\omega t \tag{1}$$

と書ける。[1]は、時刻$t+\Delta t$、東西座標$x+\Delta x$においては

$$\theta+\Delta\theta=\theta_0+k(x+\Delta x)-\omega(t+\Delta t) \tag{2}$$

となる。[1]と[2]との差より、位相の変化$\Delta\theta$について、

$$\Delta\theta=k\Delta x-\omega\Delta t \tag{3}$$

が成り立つ。位相が一定であるためには、

$$k\Delta x-\omega\Delta t=0 \tag{4}$$

つまり、

$$\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{\omega}{k} \tag{5}$$

でなければならない。したがって、位相が一定の値である場所が移動する速度は、

$$c_x=\frac{\omega}{k} \tag{6}$$

である。[6]を波の**位相速度**(phase velocity)という。

一方、**波束**(wave packet)が進行する速度を群速度という。つまり、群速度は波の振幅の大きい場所が移動していく速度である。波束とは、異なる波数の波の重ね合わせであり、時刻t、東西座標xにおいては

$$f(x,t)=\int\hat{f}(k)\exp\left[i\{kx-\omega(k)t\}\right]dk \tag{7}$$

と表せる。[7]は、時刻$t+\Delta t$、東西座標$x+\Delta x$においては

$$\begin{aligned} f(x+\Delta x,t+\Delta t)&=\int\hat{f}(k)\exp\left[i\{k(x+\Delta x)-\omega(k)(t+\Delta t)\}\right]dk \\ &=\int\hat{f}(k)\exp\left[i\{kx-\omega(k)t\}\right]\exp\left[i\{k\Delta x-\omega(k)\Delta t\}\right]dk \end{aligned} \tag{8}$$

となる。ここで、波の振幅$|f(x,t)|$が、一般に

$$|f(x+\Delta x,t+\Delta t)|=|f(x,t)| \tag{9}$$

となるためには、

$$\exp\left[i\{k\Delta x-\omega(k)\Delta t\}\right]$$

がkによらず一定でなければならない。このとき、$k\Delta x-\omega(k)\Delta t$が一定だから、

$$\frac{\partial}{\partial k}\{k\Delta x-\omega(k)\Delta t\}=0 \tag{10}$$

となって、

$$\Delta x-\frac{\partial\omega}{\partial k}\Delta t=0 \tag{11}$$

つまり、

$$\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{\partial\omega}{\partial k} \tag{12}$$

が得られる。したがって、振幅が一定の値である場所が移動する速度は、

$$c_{gx} = \frac{\partial \omega}{\partial k} \qquad [13]$$

である。[13]を波の**群速度**(group velocity)という。