

## 4 赤道波 (2)

### 4. 1 赤道ケルビン波以外の赤道波

次に、赤道ベータ平面における浅水方程式系[7]~[9]を、 $\nu \neq 0$  という条件のもとで解く。  
[13]、[14]と同様に、東西、時間方向には波型を仮定すると、[7]~[9]は

$$-i\omega \hat{u} = \beta y \hat{v} - ik \hat{\Phi} \quad [29]$$

$$-i\omega \hat{v} = -\beta y \hat{u} - \frac{d}{dy} \hat{\Phi} \quad [30]$$

$$-i\omega \hat{\Phi} = -gH \left( ik \hat{u} + \frac{d}{dy} \hat{v} \right) \quad [31]$$

と書ける。[29]に[31]を代入して  $\hat{\Phi}$  を消去すると、

$$\begin{aligned} -i\omega \hat{u} &= \beta y \hat{v} - gH \left( i \frac{k^2}{\omega} \hat{u} + \frac{k}{\omega} \frac{d}{dy} \hat{v} \right) \\ i \left( gH \frac{k^2}{\omega} - \omega \right) \hat{u} &= \left( \beta y - gH \frac{k}{\omega} \frac{d}{dy} \right) \hat{v} \end{aligned} \quad [32]$$

が得られ、一方、[30]に[31]を代入して  $\hat{\Phi}$  を消去すると、

$$\begin{aligned} -i\omega \hat{v} &= -\beta y \hat{u} - gH \left( \frac{k}{\omega} \frac{d}{dy} \hat{u} - i \frac{1}{\omega} \frac{d^2}{dy^2} \hat{v} \right) \\ \left( \beta y + gH \frac{k}{\omega} \frac{d}{dy} \right) \hat{u} &= i \left( \omega + gH \frac{1}{\omega} \frac{d^2}{dy^2} \right) \hat{v} \end{aligned} \quad [33]$$

が得られる。[32]、[33]より、 $\hat{u}$  を消去すると、

$$\begin{aligned} \left( \beta y + gH \frac{k}{\omega} \frac{d}{dy} \right) \left( \beta y - gH \frac{k}{\omega} \frac{d}{dy} \right) \hat{v} &= - \left( gH \frac{k^2}{\omega} - \omega \right) \left( \omega + gH \frac{1}{\omega} \frac{d^2}{dy^2} \right) \hat{v} \\ \left[ \left( gH \frac{k}{\omega} \frac{d}{dy} + \beta y \right) \left( gH \frac{k}{\omega} \frac{d}{dy} - \beta y \right) + \left( \omega - gH \frac{k^2}{\omega} \right) \left( \omega + gH \frac{1}{\omega} \frac{d^2}{dy^2} \right) \right] \hat{v} &= 0 \\ \left[ gH \frac{d^2}{dy^2} + \left( \omega^2 - gH k^2 - \beta gH \frac{k}{\omega} \right) - \beta^2 y^2 \right] \hat{v} &= 0 \end{aligned} \quad [34]$$

となる。ここで、 $y$ 、 $k$  を赤道変形半径  $L$  で規格化して、

$$y_* = \frac{y}{L}, \quad k_* = Lk \quad [35]$$

とすれば、

$$\begin{aligned} \left[ \beta \sqrt{gH} \frac{d^2}{dy_*^2} + \left( \omega^2 - \beta \sqrt{gH} k_*^2 - \beta^{2/3} (gH)^{3/4} \frac{k_*}{\omega} \right) - \beta \sqrt{gH} y_*^2 \right] \hat{v} &= 0 \\ \left[ \frac{d^2}{dy_*^2} + \left( \frac{1}{\beta \sqrt{gH}} \omega^2 - k_*^2 - \sqrt{\beta \sqrt{gH}} \frac{k_*}{\omega} \right) - y_*^2 \right] \hat{v} &= 0 \end{aligned} \quad [36]$$

が得られる。さらに、 $\omega$  を  $\sqrt{\beta\sqrt{gH}}$  で規格化して、

$$\omega_* = \frac{\omega}{\sqrt{\beta\sqrt{gH}}} \quad [37]$$

とすれば、

$$\left[ \frac{d^2}{dy_*^2} + \left( \omega_*^2 - k_*^2 - \frac{k_*}{\omega_*} \right) - y_*^2 \right] \hat{v} = 0 \quad [38]$$

と表せる。これは、**エルミートの微分方程式**(Hermite's differential equation)になっている。

いまは赤道付近に捕捉された波動を調べているので、[38]の境界条件は、 $y_* \rightarrow \pm\infty$  で  $\hat{v} \rightarrow 0$  である。この条件のもとで、微分方程式[38]を解くと、 $\omega_*^2 - k_*^2 - \frac{k_*}{\omega_*}$  は離散的な値しかとることができず、

$$\begin{aligned} \omega_*^2 - k_*^2 - \frac{k_*}{\omega_*} = 1 \quad \text{のとき、} & \quad \hat{v} = \exp\left[-\frac{1}{2}y_*^2\right] \\ \omega_*^2 - k_*^2 - \frac{k_*}{\omega_*} = 3 \quad \text{のとき、} & \quad \hat{v} = 2y_* \exp\left[-\frac{1}{2}y_*^2\right] \\ \omega_*^2 - k_*^2 - \frac{k_*}{\omega_*} = 5 \quad \text{のとき、} & \quad \hat{v} = (4y_*^2 - 2) \exp\left[-\frac{1}{2}y_*^2\right] \\ & \quad \vdots \end{aligned}$$

となる。一般には、

$$\omega_*^2 - k_*^2 - \frac{k_*}{\omega_*} = 2n + 1 \quad (n \text{ は } 0 \text{ 以上の整数}) \quad [39]$$

のとき、

$$\hat{v} = H_n(y_*) \exp\left[-\frac{1}{2}y_*^2\right] \quad [40]$$

と書ける。ただし、 $H_n(x)$  は  $n$  次の**エルミート多項式**(Hermite polynomial)である。[39]は分散関係を表すが、 $\omega$  についての3次方程式になっているので、 $n$  の値を決めて  $\hat{v}$  の南北構造が定まっても、ある  $k$  の値に対応する  $\omega$  の値は3個存在する。

$\hat{u}$  と  $\hat{\Phi}$  は、[31]、[32]を用いて定められる。[32]より、

$$\begin{aligned} i \left( \frac{k_*^2}{\omega_*} - \omega_* \right) \hat{u} &= \left( y_* - \frac{k_*}{\omega_*} \frac{d}{dy_*} \right) \hat{v} \\ \hat{u} &= i \frac{1}{\omega_*^2 - k_*^2} \left( \omega_* y_* - k_* \frac{d}{dy_*} \right) \hat{v} \end{aligned} \quad [41]$$

が得られる。また、[31]より、

$$-i \omega_* \hat{\Phi} = - \left( ik_* \hat{u} + \frac{d}{dy_*} \hat{v} \right)$$

$$\hat{\phi} = \frac{k_*}{\omega_*} \hat{u} - i \frac{1}{\omega_*} \frac{d}{dy_*} \hat{v}$$

となり、[41]を代入して、

$$\hat{\phi} = i \frac{1}{\omega_*^2 - k_*^2} \left( k_* y_* - \omega_* \frac{d}{dy_*} \right) \hat{v} \quad [42]$$

が得られる。

#### 4. 2 混合ロスビー重力波

まず、 $n=0$ のときの解を検討する。分散関係式[39]を解くと、

$$\begin{aligned} \omega_*^3 - k_*^2 \omega_* - \omega_* - k_* &= 0 \\ (\omega_* + k_*) (\omega_*^2 - k_* \omega_* - 1) &= 0 \end{aligned} \quad [43]$$

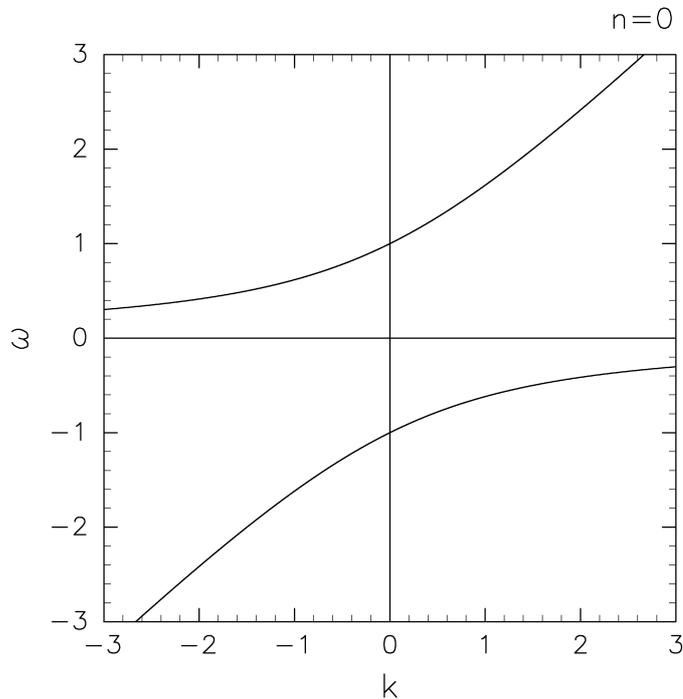
となる。しかし、

$$\omega_* + k_* = 0$$

とすると、[41]、[42]で $\hat{u}$ 、 $\hat{\phi}$ が有限な値を持たない。したがって、

$$\begin{aligned} \omega_*^2 - k_* \omega_* - 1 &= 0 \\ \omega_* &= \frac{1}{2} k_* \pm \sqrt{\frac{1}{4} k_*^2 + 1} \end{aligned} \quad [44]$$

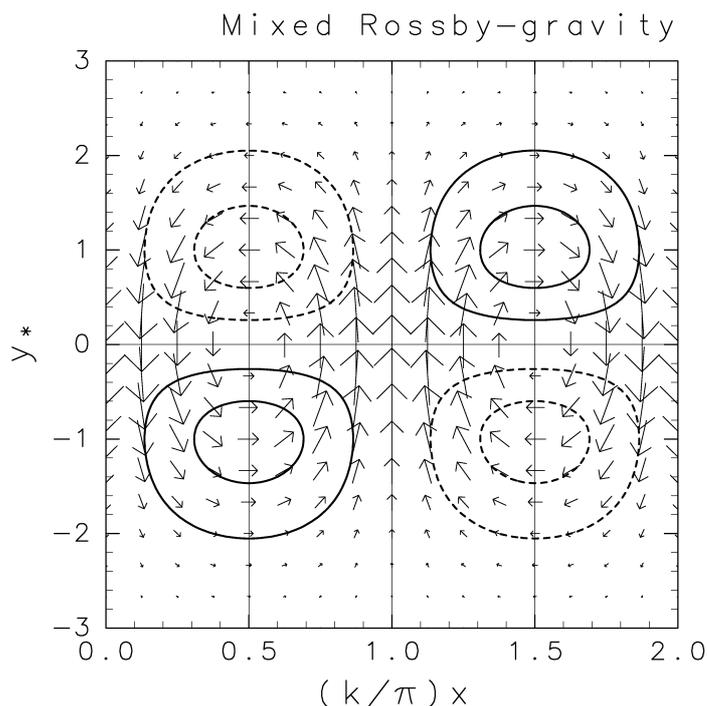
である。分散関係を図示すると次のようになる。



赤道波の分散関係 ( $n=0$ )

位相速度  $c = \omega/k$  が負の成分は西進し、**混合ロスビー重力波**(mixed Rossby-gravity wave)と

よばれる。[41]、[42]より、混合ロスビー重力波の水平構造を図示すると次のようになる。



混合ロスビー重力波の水平構造

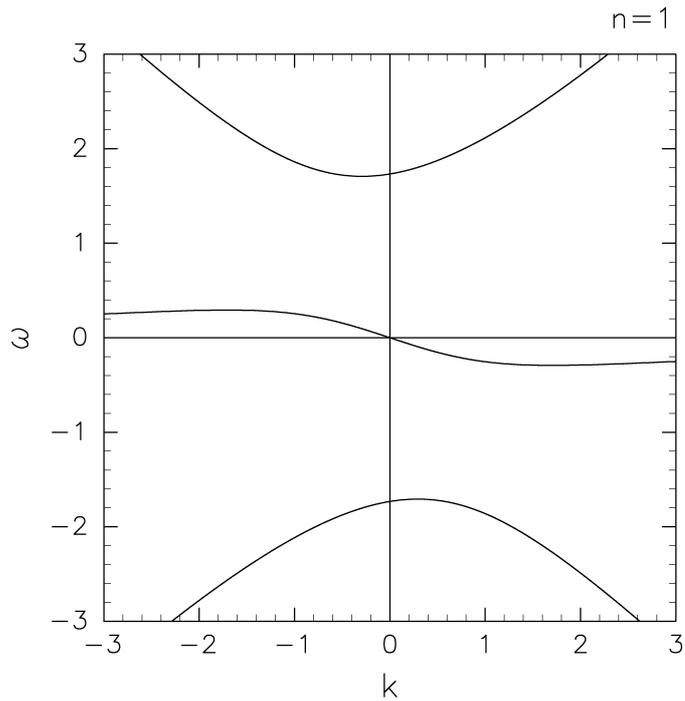
気圧偏差と東西風は赤道について反対称な構造を持っていることがわかる。混合ロスビー重力波はロスビー波と重力波が混合したモードとみなされる。一方、位相速度が正の成分は東進し、**東進慣性重力波**(eastward inertio-gravity wave)とよばれる。

#### 4. 3 赤道ロスビー波

次に、 $n=1$  のときの解を検討する。分散関係式[39]は、

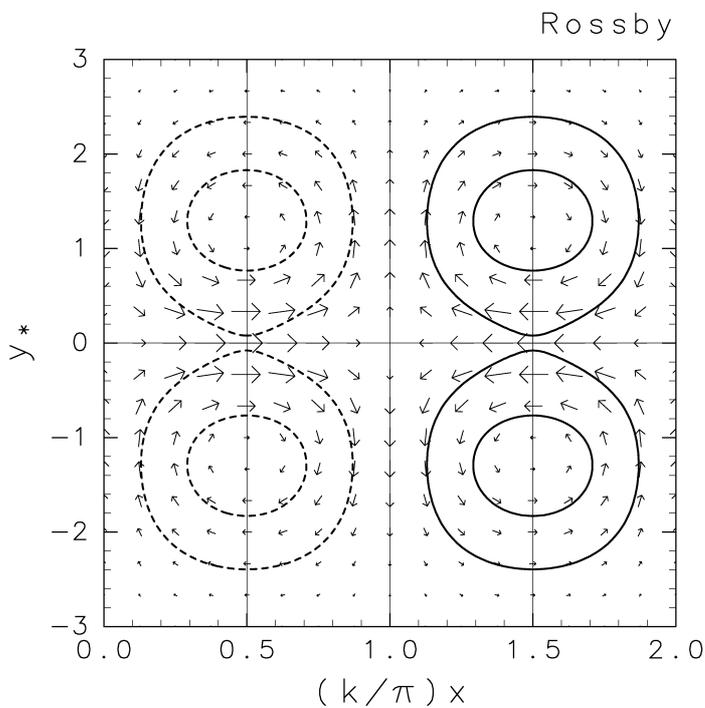
$$\omega_*^3 - k_*^2 \omega_* - 3\omega_* - k_* = 0 \quad [45]$$

となる。3次方程式を解いて分散関係を図示すると次のようになる。



赤道波の分散関係 ( $n=1$ )

$\omega$  がゼロに近い中間の値を持つ解は、位相速度  $c=\omega/k$  が負であり、ゆっくりと西進する成分である。これを**赤道ロスビー波**(equatorial Rossby wave)とよばれる。[41]、[42]より、赤道ロスビー波の水平構造を図示すると次のようになる。



赤道ロスビー波 ( $n=1$ ) の水平構造

赤道ロスビー波は赤道に捕捉されたロスビー波とみなされる。  $n \geq 2$  の場合にも同様のモードが現れるので、区別するために  $n=1$  赤道ロスビー波とよぶことがある。  $n$  が奇数の場合は、気圧偏差と東西風は赤道対称、偶数の場合は赤道反対称である。

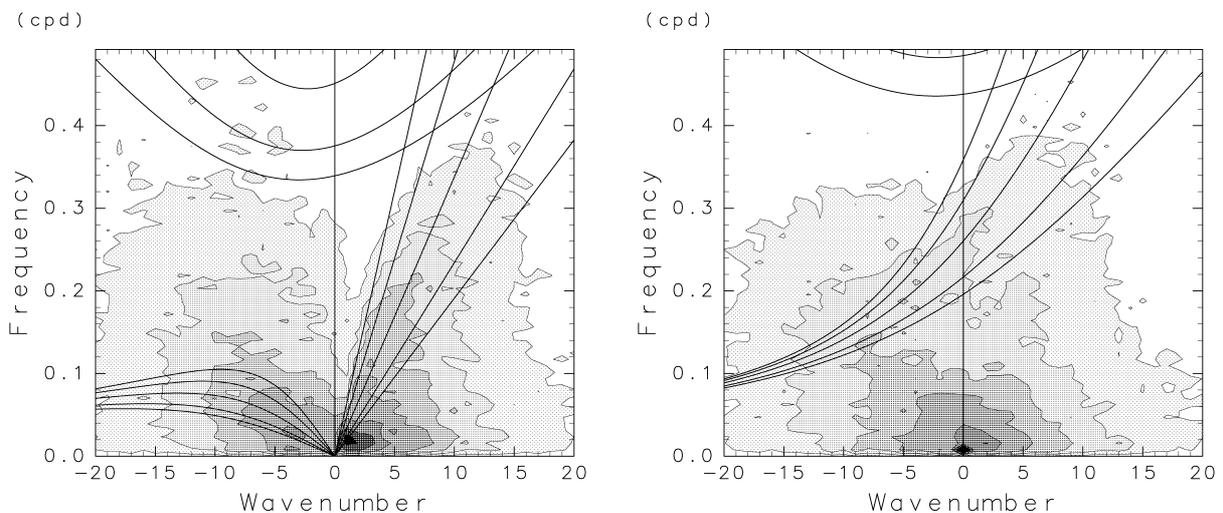
$\omega$  が絶対値の大きい正や負の値をとる 2 つの解は**慣性重力波**(inertio-gravity wave)に対応する。位相速度  $c = \omega/k$  が正で東進する成分は東進慣性重力波、位相速度が負で西進する成分は**西進慣性重力波**(westward inertio-gravity wave)とよばれる。慣性重力波は赤道ロスビー波と比べて位相速度の絶対値が大きい。東進慣性重力波や西進慣性重力波も、赤道ロスビー波と同じく、  $n \geq 2$  の場合にも同様のモードが現れる。

#### 4. 4 赤道波のスペクトル

実際の気象における赤道波のスペクトルを調べてみる。ここでは、赤道域における降水量データから、時間-東西スペクトルを解析する。つまり、降水量の偏差  $P(x, t)$  を

$$P(x, t) = \Re \int \int \tilde{P}(k, \omega) e^{i(kx - \omega t)} dk d\omega \quad [46]$$

の形に分解して、  $|\tilde{P}(k, \omega)|$  の分布を求める。赤道域の降水量偏差のうち、赤道対称な成分として、赤道から北緯  $15^\circ$  までの降水量偏差の平均と、赤道から南緯  $15^\circ$  までの平均との和を計算する。同様に、赤道反対称な成分として、両者の差を計算する。赤道対称な成分は赤道ケルビン波や赤道ロスビー波などに対応し、赤道反対称な成分は混合ロスビー重力波などに対応する。



赤道域の降水の時間-東西スペクトル

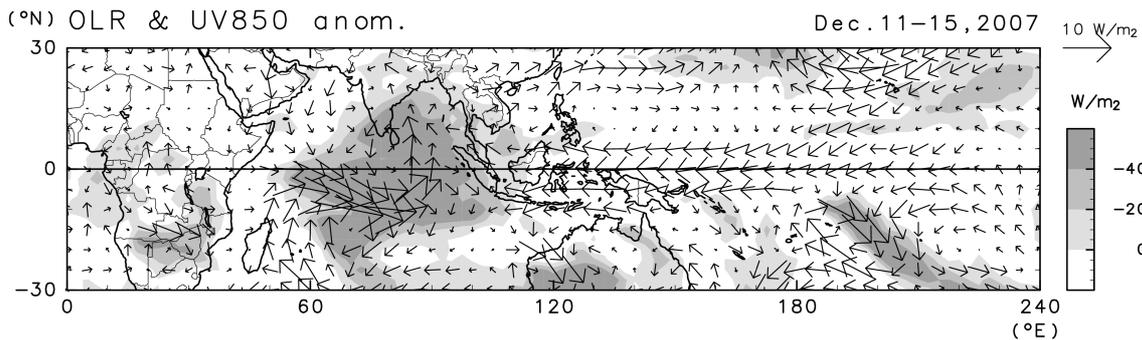
横軸は東西波数、縦軸は角振動数、左の図は赤道対称成分、右の図は赤道反対称成分。図中の線は、等価深度が 8 m、12 m、25 m、50 m、90 m のときの赤道波の分散関係を表す。

左の図は赤道対称成分、右の図は赤道反対称成分のスペクトルである。それぞれの図の右半分は東進成分、左半分は西進成分を表す。赤道対称成分に注目すると、赤道ケルビン波や赤道ロスビー波の分散関係に対応する、有意な降水量変動がみられる。東進成分に関しては、赤道ケルビン波とは別に、低振動数で、やや低波数の成分が卓越していることがわ

かる。これが MJO に伴う降水量変動である。後で述べるように、MJO は赤道ケルビン波と似た構造を持つが、スペクトルとしては、赤道ケルビン波から独立していることがわかる。

#### 4. 5 熱強制に対する応答

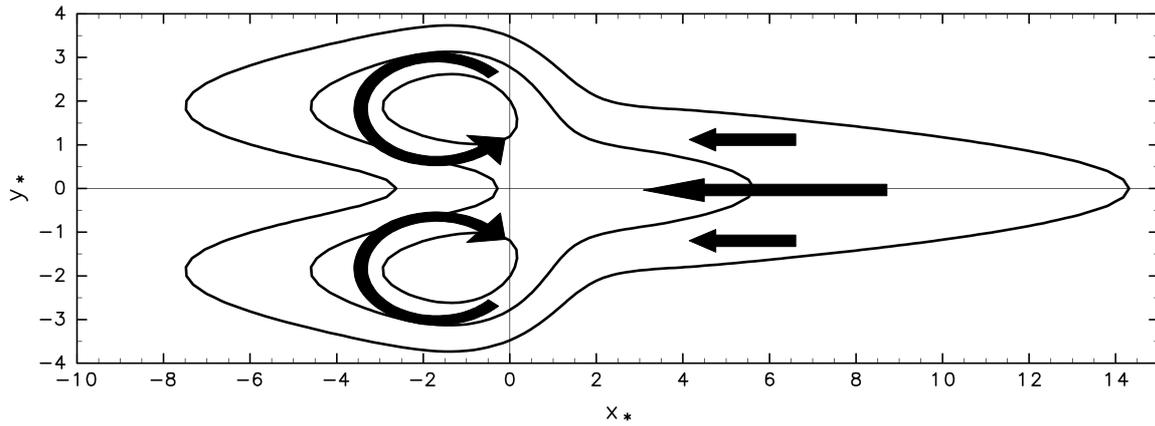
実際の MJO の構造を下の図に示した。これは、MJO に伴う対流活発域がインド洋に位置しているときの、OLR と下層風の偏差である。OLR の値が低い場所は対流活動が活発な場所である。図には下部対流圏の風の偏差が示されているが、下部対流圏と上部対流圏の偏差はほぼ逆符号と考えてよい。



OLR と 850hPa 風の偏差 (2007 年 12 月 11~15 日の平均)

対流活発域の東側には、東風偏差の領域が広がっている。東風偏差の極大は赤道上にあり、南北風成分はゼロに近い。これは赤道ケルビン波の構造に似ている。ただし、赤道ケルビン波の位相速度は 20~30m/s であるのに対して、MJO の東進速度は数 m/s 程度であり、かなり遅くなっている。対流活動域の西側では、対流活動の極大の北西側に反時計回り、南西側に時計回りの循環が生じている。いずれもそれぞれの半球での低気圧性循環になっている。ここで、上の図は北半球冬季のものであり、対流活動の中心が赤道より南半球側にずれていることに伴い、風の偏差も南に移動している点に注意する。対流活動域の西側で見られる、これらの低気圧性循環は、 $n=1$  赤道ロスビー波の構造に似ている。ただし、赤道ロスビー波自体はゆっくりと西に進む性質がある。このように、MJO に伴う対流活動域は、東側に赤道ケルビン波的な応答パターンを、西側に赤道ロスビー波的な応答パターンを伴っていることがわかる。

実は、浅水方程式系[7]~[9]に摩擦などによる減衰を表す項を付け加えたうえで、定常的な非断熱加熱に対する系の応答を計算すると、上の図に似た偏差パターンを得ることができる。このような応答パターンを**松野・ギルパターン**(Matsuno-Gill pattern)とよぶことができる。



松野・ギルパターンの模式図

問 4.1 赤道ケルビン波の位相速度は東西波数  $k$  によらず  $c = \sqrt{gH}$  であった。東西波数  $k$  の絶対値がじゅうぶんに小さいとき、赤道対称な波動である赤道ロスビー波 ( $n=1$ ) の位相速度を求め、 $g$ 、 $H$  で表せ。赤道ロスビー波は低周波数の波動であるから、分散関係式[45]において、まず  $\omega_* \rightarrow 0$  とせよ。次に、 $k_* \rightarrow 0$  とせよ。

問 4.2 東西波数  $k$  の絶対値がじゅうぶんに大きいとき、赤道反対称な波動である混合ロスビー重力波と東進慣性重力波 ( $n=0$ ) の位相速度を求め、 $g$ 、 $H$  で表せ。

## 補遺 エルミートの微分方程式

関数  $f(x)$  についての微分方程式

$$\left[ \frac{d^2}{dx^2} + m - x^2 \right] f = 0 \quad [1]$$

の解を考える。ただし、 $m$  は定数である。また、境界条件を、

$$f(x) \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow \pm\infty) \quad [2]$$

とする。ここで、

$$f(x) = F(x) \exp\left[-\frac{1}{2}x^2\right] \quad [3]$$

とおくと、

$$\left\{ \frac{d^2 F}{dx^2} - 2x \frac{dF}{dx} + (x^2 - 1)F \right\} \exp\left[-\frac{1}{2}x^2\right] + (m - x^2)F \exp\left[-\frac{1}{2}x^2\right] = 0$$

$$\left[ \frac{d^2}{dx^2} - 2x \frac{d}{dx} + m - 1 \right] F = 0 \quad [4]$$

が得られる。

ここで、 $F(x)$  を多項式の形で、

$$F(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots \quad [5]$$

と表す。[5]を[4]に代入して、 $x^k$  の項の係数に注目すると、

$$(k+1)(k+2)c_{k+2} + (-2k+m-1)c_k = 0$$

$$c_{k+2} = \frac{(2k-m+1)}{(k+1)(k+2)} c_k \quad [6]$$

となる。[6]より、

$$m = 2n + 1 \quad (n \text{ は } 0 \text{ 以上の整数}) \quad [7]$$

であれば、 $c_n \neq 0$  であっても  $c_{n+2} = c_{n+4} = c_{n+6} = \dots = 0$  が成り立つ。ここで、 $n$  が偶数である場合、 $c_1 = 0$  とすれば、 $c_3 = c_5 = c_7 = \dots = 0$  となるので、結局、 $c_{n+1} = c_{n+2} = c_{n+3} = \dots = 0$  が成り立つ。また、 $n$  が奇数である場合、 $c_0 = 0$  とすれば、 $c_2 = c_4 = c_6 = \dots = 0$  となるので、この場合も、 $c_{n+1} = c_{n+2} = c_{n+3} = \dots = 0$  が成り立つ。つまり、[7]が成り立つとき、[4]を満たすような、項の数が有限の多項式  $F(x)$  が存在する。一般に、 $0$  以上の整数  $n$  について、

$$x^n \exp\left[-\frac{1}{2}x^2\right] \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow \pm\infty) \quad [8]$$

だから、 $F(x)$  の項の数が有限であれば[3]は境界条件[2]を満たす。したがって、[7]が成り立てばよいといえる。[7]を[4]に代入し、 $F(x) = H_n(x)$  とすると、

$$\left[ \frac{d^2}{dx^2} - 2x \frac{d}{dx} + 2n \right] H_n(x) = 0 \quad (n \text{ は } 0 \text{ 以上の整数}) \quad [9]$$

が得られる。これを**エルミートの微分方程式**(Hermite's differential equation)という。また、 $H_n(x)$ を  $n$  次の**エルミート多項式**(Hermite polynomial)という。エルミート多項式を求めると、

$$\begin{aligned} H_0(x) &= 1 \\ H_1(x) &= 2x \\ H_2(x) &= 4x^2 - 2 \\ &\vdots \end{aligned}$$

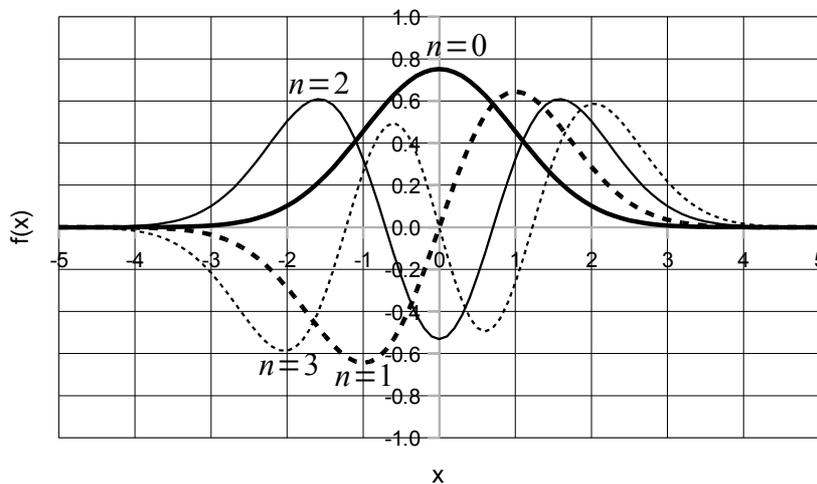
となる。一般には、

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} \quad [10]$$

と書ける。実際に、 $n=0$  のとき、[10]は[9]を満たす。また、 $n=k$  のとき、[10]が[9]を満たすと仮定すると、[9]の両辺を  $x$  で微分することによって、 $n=k+1$  のときも[10]が[9]を満たすことが示される。したがって、 $n \geq 0$  について、[10]は[9]を満たすことが証明される。このとき、 $f(x)$ は、

$$f_n(x) = H_n(x) \exp\left[-\frac{1}{2}x^2\right] \quad [11]$$

と表せる。 $f_n(x)$ を図示すると次のようになる。



$f_n(x)$  の関数形

$f_n(x)$ は、 $n$  が偶数のとき  $x=0$  について対称、奇数のとき反対称である。

**参考文献：**

- Gill, A. E., 1980: Some simple solutions for heat-induced tropical circulation. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **106**, 447-462.
- Madden, R. A., and P. R. Julian, 1971: Detection of a 40-50 day oscillation in the zonal wind in the tropic Pacific. *J. Atmos. Sci.*, **28**, 702-708.
- Madden, R. A., and P. R. Julian, 1972: Description of global-scale circulation cells in the tropics with a 40-50 day period. *J. Atmos. Sci.*, **29**, 1109-1123.
- Matsuno, T., 1966: Quasi-geostrophic motions in the equatorial area. *J. Meteor. Soc. Japan*, **44**, 25-43.
- Wallace, J. M., and V. E. Kousky, 1968: Observational evidence of Kelvin waves in the tropical stratosphere. *J. Atmos. Sci.*, **25**, 900-907.
- Wheeler, M., and G. N. Kiladis, 1999: Convectively coupled equatorial waves: Analysis of clouds and temperature in the wavenumber-frequency domain. *J. Atmos. Sci.*, **56**, 374-399.
- Yanai, M., and T. Maruyama, 1966: Stratospheric wave disturbances propagating over the equatorial Pacific. *J. Meteor. Soc. Japan*, **44**, 291-294.