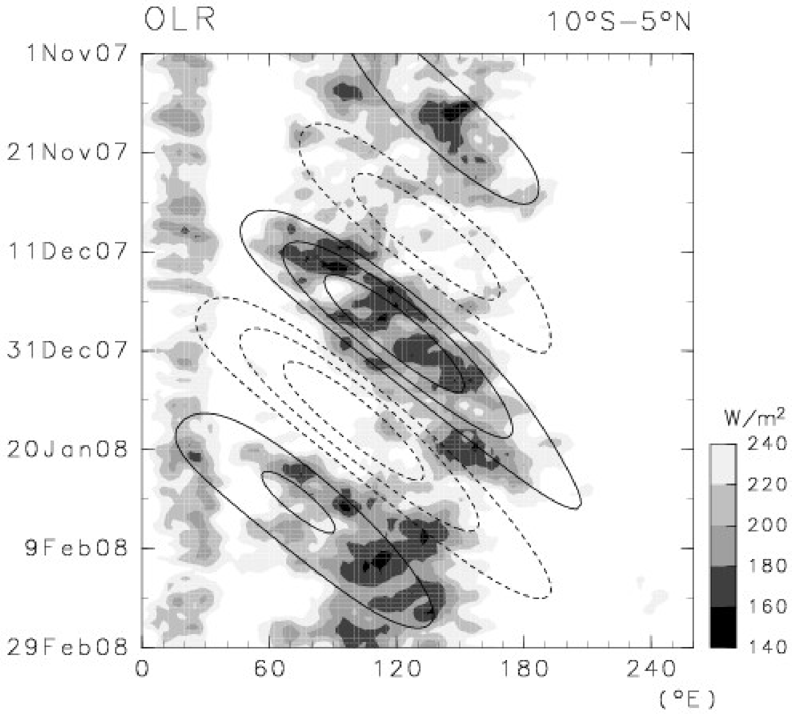
３　赤道波（１）

下の図は赤道上での積雲対流の時間変化を解析したものである。横軸は経度、縦軸は時間であり、120 日間の**外向き長波放射**(outgoing longwave radiation; OLR)の変動の様子を図示している。OLR が低い場所は雲頂高度の高い雲が存在する場所であり、積雲対流が活発であることを示す。積雲対流の活発な領域が数 m/s 程度のゆっくりとした速度で東進していく様子がわかる。このような大規模な積雲対流の東進は赤道上ではしばしばみられ、**マッデン–ジュリアン振動**(Madden-Julian oscillation; MJO)とよばれる。MJO は典型的には 40〜50 日程度の周期を持ち、**季節内変動**(intraseasonal variability; ISV)とよばれることがある。赤道域では MJO 以外にも東西に伝播するさまざまな波動が検出される。ここでは、浅水方程式系を赤道域の大気の運動に適用して、赤道上で見られる波動の性質を調べる。



（NOAA による OLR データを用いて作成）

赤道上での積雲対流の時間-経度断面

３．１　基本方程式系

第 1 傾圧モードの水平構造と時間変化を記述する浅水方程式系は、

$$\frac{\partial}{\partial t}u = fv - \frac{\partial}{\partial x}\Phi \qquad [1]$$

$$\frac{\partial}{\partial t}v = -fu - \frac{\partial}{\partial y}\Phi \qquad [2]$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\Phi = -gH\left(\frac{\partial}{\partial x}u + \frac{\partial}{\partial y}v\right) \qquad [3]$$

と書ける。ただし、u 、v 、Φ はそれぞれ、東西風、南北風、ジオポテンシャルである。また、f はコリオリ係数、g は重力加速度、H は等価深度である。

３．２　赤道ベータ平面

地球の自転角速度を Ω 、緯度を ϕ とすると、コリオリ係数は、

$$f = 2\Omega \sin\phi \tag{4}$$

と書けるが、赤道付近では、

$$f \simeq \beta y \tag{5}$$

と近似することができる。ただし、

$$\beta = \left.\frac{df}{dy}\right|_{y=0} = \left.\frac{2\Omega\cos\phi}{a}\right|_{y=0} = \frac{2\Omega}{a} \tag{6}$$

であり、 a は地球の半径である。このような条件を**赤道ベータ平面**(equatorial β-plain)という。これを[1]～[3]に代入すると、

$$\frac{\partial}{\partial t}u = \beta yv - \frac{\partial}{\partial x}\Phi \tag{7}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}v = -\beta yu - \frac{\partial}{\partial y}\Phi \tag{8}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\Phi = -gH\left(\frac{\partial}{\partial x}u + \frac{\partial}{\partial y}v\right) \tag{9}$$

が得られる。

３．３　赤道ケルビン波

赤道ベータ平面における浅水方程式系[7]～[9]は連立偏微分方程式である。連立偏微分方程式を解くためには、通常は、まず、変数を消去して1変数についての偏微分方程式を導く。今回の場合、次節で v についての偏微分方程式[33]を導出する。しかし、このような場合、 $v=0$ であるが u と Φ がゼロでない解を別に吟味する必要がある。実は、 $v=0$ という条件のもとでの解は、導出が比較的容易であるだけでなく、赤道波としても重要な解である。ここでは、赤道ベータ平面における浅水方程式系[7]～[9]を、 $v=0$ という条件のもとで解く。

[7]～[9]に $v=0$ を代入すると、

$$\frac{\partial}{\partial t}u = -\frac{\partial}{\partial x}\Phi \tag{10}$$

$$0 = -\beta yu - \frac{\partial}{\partial y}\Phi \tag{11}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\Phi = -gH\frac{\partial}{\partial x}u \tag{12}$$

となる。ここで、東西、時間方向には波型を仮定して、

$$u = \hat{u}(y)\exp[i(kx - \omega t)] \tag{13}$$

$$\Phi = \hat{\Phi}(y)\exp[i(kx - \omega t)] \tag{14}$$

とおく。ただし、 $\omega > 0$ とする。このとき、[10]～[12]は、

$$-i\omega\hat{u}=-ik\hat{\Phi} \qquad [15]$$

$$0=-\beta y\hat{u}-\frac{d}{dy}\hat{\Phi} \qquad [16]$$

$$-i\omega\hat{\Phi}=-igHk\hat{u} \qquad [17]$$

となる。

まず、東西波数 k と角振動数 ω との関係を求めるために、[15]、[17]より、 $\hat{\Phi}$ を消去すると、

$$\omega^2\hat{u}=gHk^2\hat{u}$$

となって、**分散関係式**(dispersion relationship)

$$\omega=\sqrt{gH}|k| \qquad [18]$$

が得られる。ここで、微分方程式[16]によって決まる解の南北構造に注目して、東西波数 k の符号を吟味する。[15]、[18]より、

$$\hat{u}=\frac{k}{\omega}\hat{\Phi}=\pm\frac{1}{\sqrt{gH}}\hat{\Phi} \qquad [19]$$

だから、[16]は、

$$\frac{d}{dy}\hat{\Phi}=\mp\frac{\beta}{\sqrt{gH}}y\hat{\Phi} \qquad [20]$$

と書ける。微分方程式[20]を解くと、まず両辺を $\hat{\Phi}$ で割って、

$$\frac{1}{\hat{\Phi}}\frac{d\hat{\Phi}}{dy}=\mp\frac{\beta}{\sqrt{gH}}y$$

両辺を y で積分すると、

$$\ln\hat{\Phi}=\mp\frac{\beta}{2\sqrt{gH}}y^2+C' \quad (\ C'\ \text{は積分定数})$$

ゆえに、[20]の解は、

$$\hat{\Phi}=C\exp\left[\mp\frac{\beta}{2\sqrt{gH}}y^2\right] \quad (\ C\ \text{は任意の定数}) \qquad [21]$$

である。いまは赤道付近に捕捉された波動を調べているので、 $y\to\pm\infty$ で $\hat{\Phi}\to 0$ である。したがって、複号のうち上のほうを選択して、解の南北構造は

$$\hat{\Phi}=C\exp\left[-\frac{\beta}{2\sqrt{gH}}y^2\right] \qquad [22]$$

となる。[19]で複号のうち上のほうを選択すると、東西波数 k は正であることがわかる。ゆえに、分散関係式は、

$$\omega=\sqrt{gH}k \qquad [23]$$

である。位相速度 c は、

$$c=\frac{\omega}{k}=\sqrt{gH} \qquad [24]$$

であり、東西波数 k によらず、一定の速さ $\sqrt{gH}$ で東進する波動であることがわかる。この波動を**赤道ケルビン波**(equatorial Kelvin wave)という。 $g=9.8$ m/s^2、 $H=80$ m のとき、

位相速度 c は $c=28$ m/s である。赤道ケルビン波の位相速度の大きさは、浅水波の位相速度の大きさに等しい。

次に、解の空間構造を検討する。[22]より、気圧偏差は赤道で最大となり、赤道から離れるにしたがって減衰していくことがわかる。 $y=\pm\sqrt{\frac{\sqrt{gH}}{\beta}}$ で、 $\exp\left[-\frac{1}{2}\right]$ 倍に減衰するが、このときの y の値

$$L=\sqrt{\frac{\sqrt{gH}}{\beta}} \qquad [25]$$

を**赤道変形半径**(equatorial radius of deformation)という。赤道から赤道変形半径だけ離れた場所の慣性周期（厳密には慣性周期の $\frac{1}{2\pi}$ 倍＝ $\frac{1}{f}$ ）の間に浅水波（位相速度 $\sqrt{gH}$ ）が進行する距離は赤道変形半径に等しい。 $g=9.8$ m/s²、 $H=80$ m、 $\beta=2.3\times10^{-11}$ /m s のとき、赤道変形半径 L は $L=1.1\times10^{6}$ m であり、赤道波の南北スケールは緯度 10 度程度であることがわかる。 y を赤道変形半径 L で規格化して、

$$y_*=\frac{y}{L} \qquad [26]$$

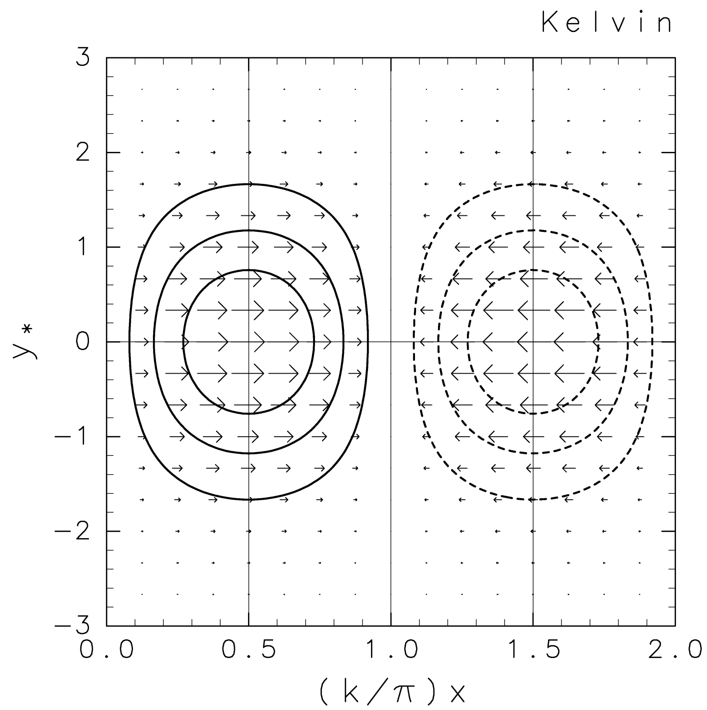
とすれば、[22]は

$$\hat{\Phi}=C\exp\left[-\frac{1}{2}y_*^2\right] \qquad [27]$$

と書ける。このとき、[15]より、

$$\hat{u}=\frac{k}{\omega}\hat{\Phi}=C\frac{1}{\sqrt{gH}}\exp\left[-\frac{\beta}{2\sqrt{gH}}y^2\right]=C\frac{1}{\sqrt{gH}}\exp\left[-\frac{1}{2}y_*^2\right] \qquad [28]$$

である。[27]、[28]より、赤道ケルビン波の水平構造を図示すると次のようになる。



赤道ケルビン波の水平構造

気圧偏差と東西風は赤道について対称な構造を持っていることがわかる。

問 3.1　赤道ケルビン波に伴う東西風速の偏差が 5 m/s であった。重力加速度を $g=9.8$ m/s^2、等価深度を $H=80$ m としたとき、対応する高度偏差を求め、有効数字 2 けたで答えよ。

問 3.2　赤道ケルビン波に伴うジオポテンシャルと東西風速の偏差は

$$\Phi = C\exp\left[-\frac{\beta}{2\sqrt{gH}}y^2\right]\cos kx$$

$$u = C\frac{1}{\sqrt{gH}}\exp\left[-\frac{\beta}{2\sqrt{gH}}y^2\right]\cos kx$$

と書くことができる。このとき、気圧傾度力とコリオリ力の南北成分を求めよ。また、両者の関係について考察せよ。