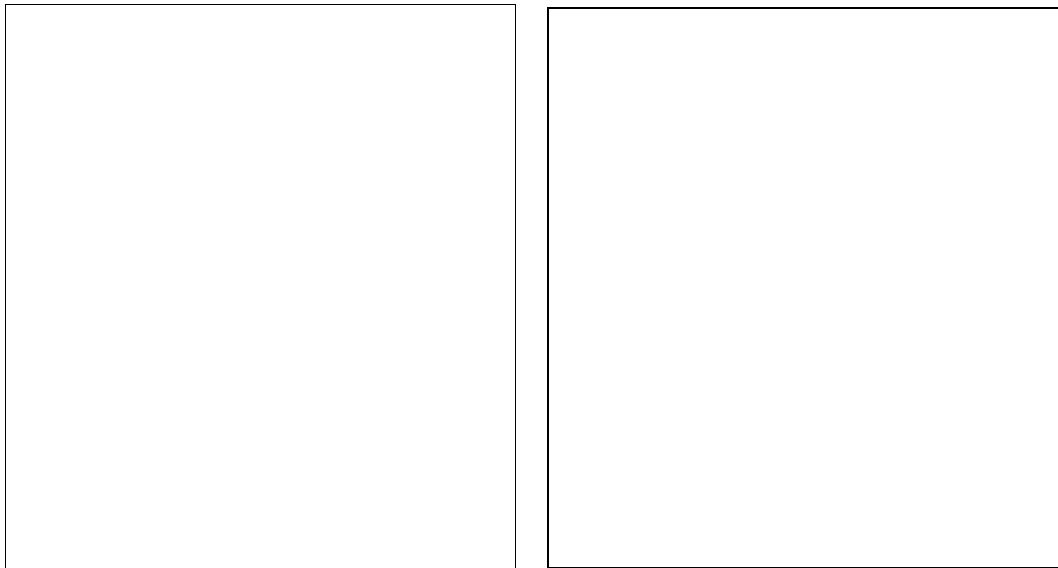


4 第2種条件つき不安定

4. 1 熱帯低気圧の発達の概観

北西太平洋において、中心付近の風速が 17.2m/s 以上の熱帯低気圧を台風という。台風は巨大な渦であり、反時計回りに風が吹きこんでいる。気象衛星による雲画像を使うと、渦巻き状の構造を確かめることができる。台風（熱帯低気圧）は温帯低気圧とは違い、軸対称な構造をしている。天気図上では、台風を中心のまわりの等圧線は同心円状に密集している。温度分布も軸対称であり、対流圏内では、凝結熱の影響により周囲より気温が高くなっている。このため、静水圧平衡の関係から、上空にいくほど低気圧偏差は小さくなる。

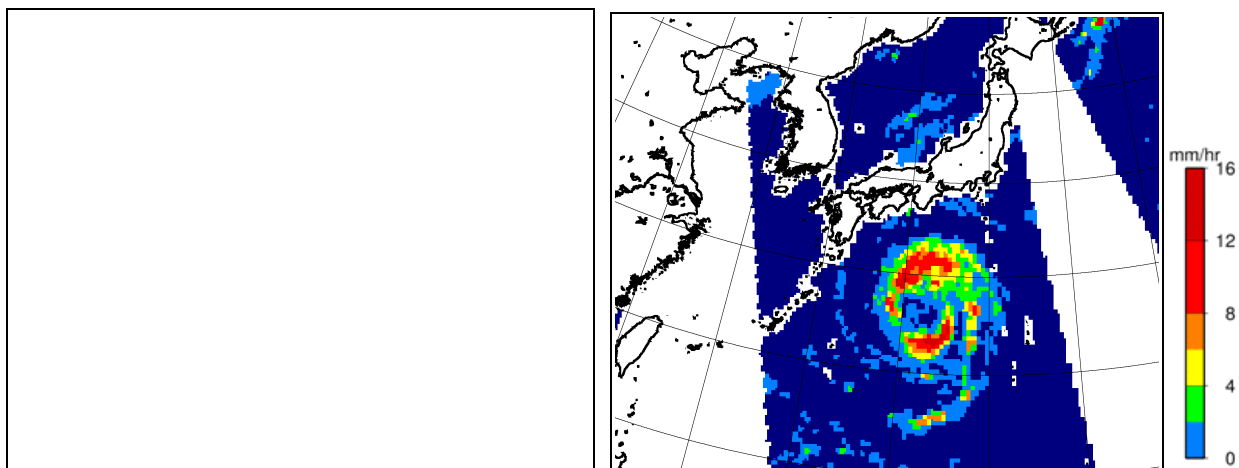


(気象庁より、北海道放送のウェブサイトを通して入手)

台風の例 (2011 年台風 6 号)

地上天気図 (左) と 500hPa 天気図 (右) (いずれも 2011 年 7 月 17 日 21 時)

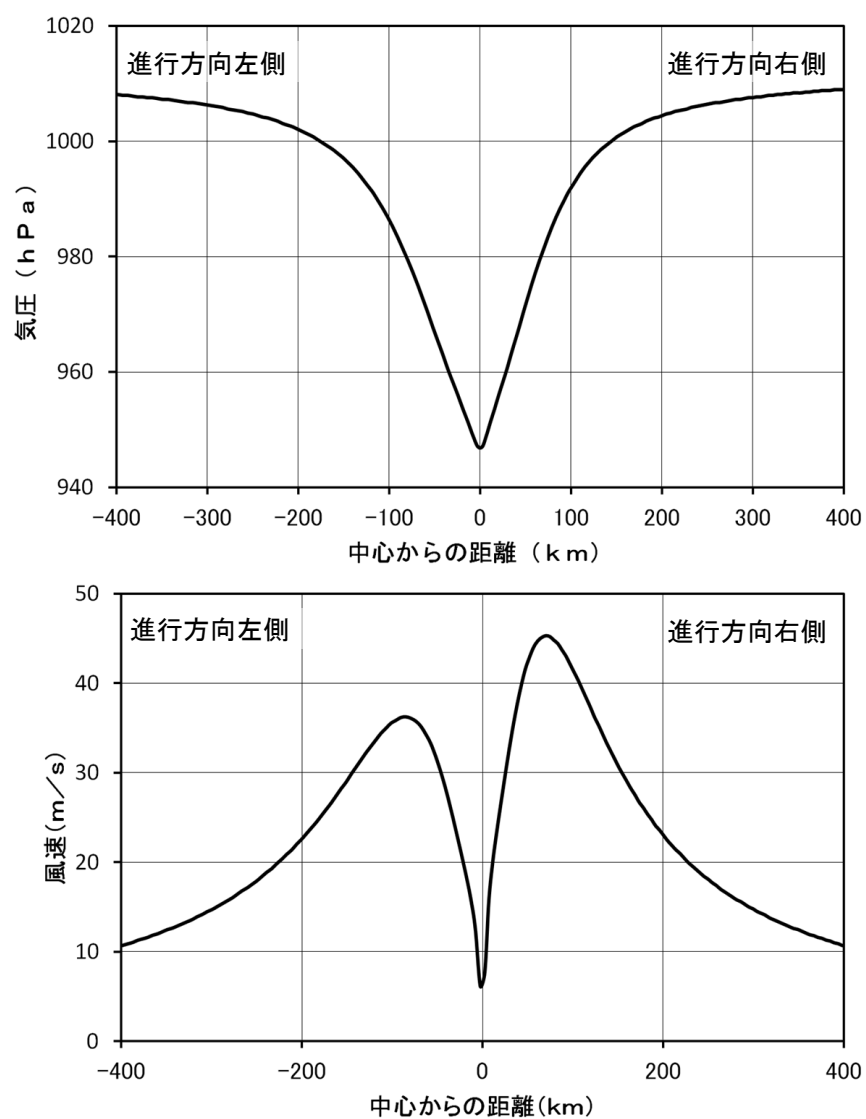
一般に台風は中心に近づくほど風速が大きくなるが、中心付近では風が弱く晴れている場合がある。これを台風目という。**台風目**(typhoon eye)は雲画像で確認できることが多い。台風目は、中心に向かって吹きこんできた風が遠心力の影響でそれ以上近づくことができない領域であると考えられ、周囲の積乱雲に伴う上昇気流の補償下降気流が生じている。このため、台風目の中では雲は発達しにくい。台風目は非常に背の高い積乱雲に囲まれている。これらの積乱雲を**壁雲**(wall cloud)という。壁雲の周りでは、やや背の低い積乱雲がらせん状に連なっている。これを**スパイラルバンド**(spiral band)という。



(赤外画像は気象庁のウェブサイトより入手、降水量は AMSR-E のデータを用いて作成)

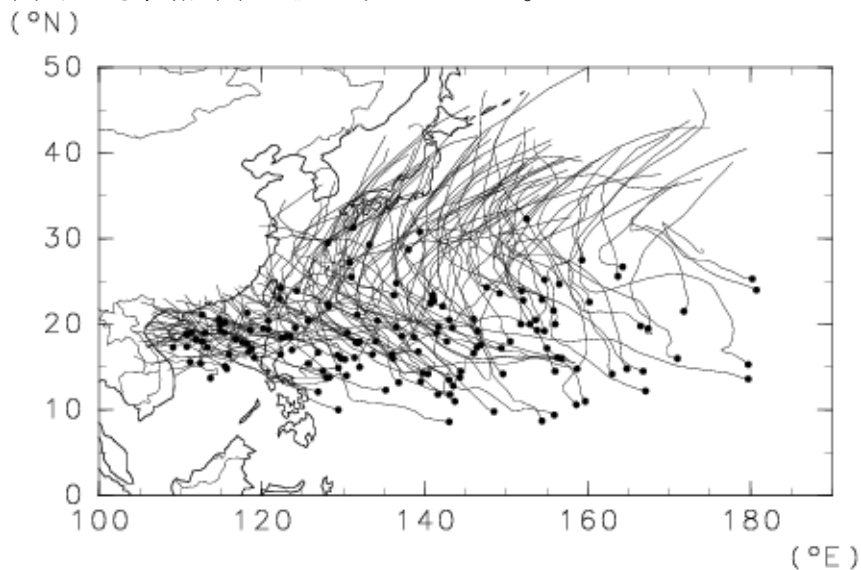
台風 の 例 (2011 年台風 12 号)

赤外画像 (2011 年 9 月 1 日 12 時) (左) と衛星観測による降水量 (右)

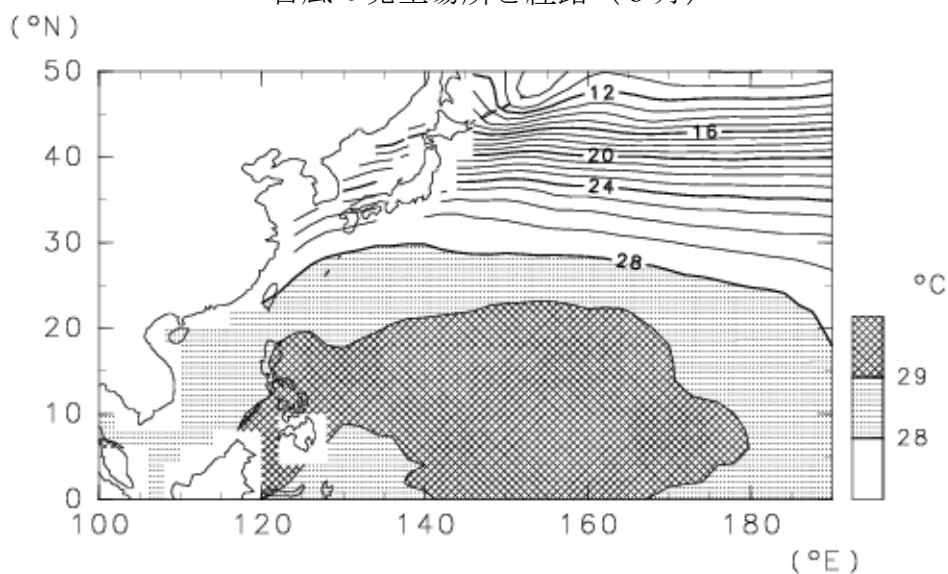


台風 の 中心 の まわ り の 風 速 (上) と 気 圧 (下) の 分 布 の 模 式 図

熱帯低気圧は、海面水温の高い海域でばらばらに発生していた積乱雲が集中して組織化することによって発生する。熱帯低気圧が渦として発生、発達するためには、コリオリ力が必要である。実際に、地球の自転の効果であるコリオリ力ははたらかない赤道付近では、海面水温が高くても、熱帯低気圧は発生しない。



台風の発生場所と経路（9月）



海面水温（9月）

（気象庁によるデータを用いて作成）

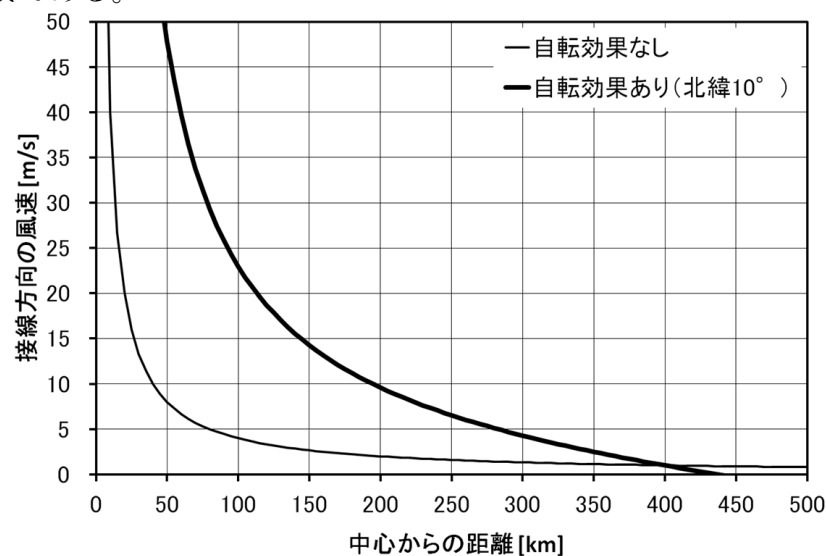
ここで、角運動量保存則を用いて、渦の発達における地球の自転の効果を評価する。熱帯低気圧の中心のまわりの風のうち、円周方向の成分を v とする。中心からの距離を r とすれば、単位質量あたりの角運動量 L は、

$$L = rv$$

である。しかし、角速度 Ω で回転している地球上での運動を考えているので、自転に伴う角運動量も考慮に入れる必要がある。緯度 ϕ における有効な自転角速度は $\Omega \sin \phi$ である。この回転に伴う運動を加えて、

$$L_{abs} = r(r\Omega \sin \phi + v) = r^2\Omega \sin \phi + rv$$

とする。これを**絶対角運動量**(absolute angular momentum)という。地面との摩擦の影響を無視した場合、絶対角運動量は保存する。赤道上 ($\phi = 0^\circ$) では、自転の効果が効かないので、単純に $L=rv$ が保存する、つまり、中心からの距離に反比例して円周方向の風速が増大する。赤道から離れると、はじめに円周方向の風速 v がゼロであっても、自転の効果により、絶対角運動量を持つことができる。このような空気が中心に近づくと、急激に風速が増大する。熱帯低気圧の中心付近の強い風はこのようにして生じる。したがって、熱帯低気圧が発生するのは通常、地球の自転の効果が有効にはたらく、緯度が $5\sim 10^\circ$ よりも高緯度側の領域である。



絶対角運動量保存のもとでの風速分布の例

一度、低気圧性の渦ができると、海面付近の空気は渦の中心付近に集まり、上昇気流が生じる。一般に成層大気中で上昇気流が生じると、温位の低い空気が上昇してくるので温度は低下する。しかし、じゅうぶんに水蒸気が供給されている環境では、水蒸気の凝結によって潜熱が放出され逆に加熱される。すると、低気圧がますます強くなり、気圧勾配の強化や水平風の収束により渦が強化される。このような連鎖によって、渦は加速度的に発達していく。これを**第2種条件つき不安定**(conditional instability of the second kind; CISK)という。熱帯低気圧は第2種条件つき不安定によって発達すると考えられる。

4. 2 基本方程式系

プリミティブ方程式系を用いて、軸対称な構造を持つ熱帯低気圧の発生、発達を、第2種条件つき不安定という観点で考察する。まず、中心を原点とする円筒座標系で、円周方向の運動方程式を考える。原点に関して対称な場を考えているので、気圧は円周方向には一様であって、気圧傾度力にはたらかない。また、微小振幅を考えるので、2次の量である移流項は考えなくてよい。したがって、時間変化項とコリオリ力のみを考えて、運動方程式は、

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -fu \quad [1]$$

と書ける。ここで、 u は風速の半径 r の方向の成分、 v は円周方向の成分であり、 f はコリオリ係数である。

一方、半径方向の運動方程式は、気圧傾度力も考慮に入れて、

$$\frac{\partial u}{\partial t} = fv - \frac{\partial \Phi}{\partial r}$$

となる。 Φ はジオポテンシャルである。いまは、慣性周期より遅い運動の変化を考えている。また、原点のまわりの渦を考えているので、 u は v より小さい。したがって、左辺は右辺第1項に比べてじゅうぶんに小さい。ゆえに、半径方向の運動方程式は、

$$fv - \frac{\partial \Phi}{\partial r} = 0$$

と書ける。つまり、地衡風平衡が成り立っている。微小振幅を考えているので、2次の量である遠心力は考えなくてよい。気圧 p で偏微分すると、

$$f \frac{\partial v}{\partial p} - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial p} \right) = 0$$

となる。ここで、静水圧平衡を考えると、比容 α を用いて、

$$f \frac{\partial v}{\partial p} + \frac{\partial \alpha}{\partial r} = 0$$

と書くことができ、結局、

$$f \frac{\partial v}{\partial p} + \frac{R}{p} \left(\frac{p}{p_0} \right)^{R/C_p} \frac{\partial \theta}{\partial r} = 0 \quad [2]$$

と表せる。これは温度風の関係である。

次に、連続の式は、円筒座標系であることに注意して、

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru) + \frac{\partial \omega}{\partial p} = 0 \quad [3]$$

と表せる。また、熱力学方程式は、

$$\frac{\partial}{\partial t} \theta = \Gamma \omega + \eta' \omega_E \quad [4]$$

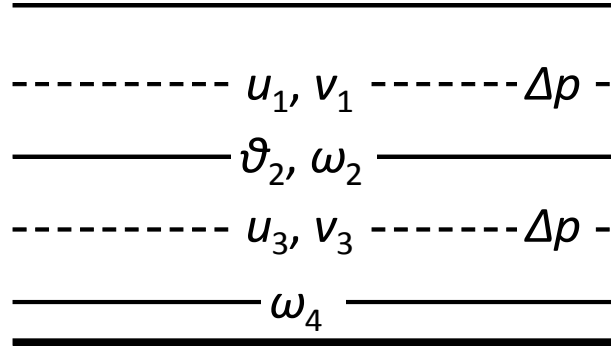
と表せる。ここで、 ω は鉛直 p 速度である。また、 $\Gamma = -\frac{d\bar{\theta}}{dp}$ であり、基本場の成層度を表している。左辺第2項の ω_E はエクマン境界層上端での鉛直 p 速度である。この項は、エクマン境界層上端での上昇流に対応して水蒸気が供給され、潜熱が解放されて非断熱加熱が生じることを表している。係数 η' は、現実大気においては、 ω_E が負、つまり上昇流のときは正の値をとり、 ω_E が正、つまり下降流のときはほぼゼロであると考えられる。しかし、ここでは線形論で扱うため、 ω_E の符号に関係なく η' は正の定数とする。エクマン境界層上端での上昇流 ω_E は、渦度 $\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv)$ に比例し、

$$\omega_E = -\frac{p_E}{2} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv) \quad [5]$$

と書ける。 p_E はエクマン境界層の厚さを気圧で表したものである。

4. 3 2層モデル

対流圏下部のエクマン境界層を除いた対流圏全体を上半分と下半分の2層に分けて考える。以下、上半分の層を第1層、下半分の層を第3層とよび、それぞれの層の厚さを Δp とする。また、上半分の層と下半分の層との境界で鉛直流や温位偏差を考えるが、この高度を第2層とする。さらに、下半分の層の下端、つまりエクマン境界層の上端を第4層とする。



円周方向の運動方程式[1]を第1層と第3層に適用すると、

$$\frac{\partial}{\partial t} v_1 = -f u_1 \quad [6]$$

$$\frac{\partial}{\partial t} v_3 = -f u_3 \quad [7]$$

が得られる。次に、連続の式[3]を第2層と第4層に適用すると、

$$\omega_2 = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_1) \Delta p \quad [8]$$

$$\omega_4 = \omega_2 - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_3) \Delta p \quad [9]$$

と表せる。さらに、熱力学方程式[4]を第2層に適用して、

$$\frac{\partial}{\partial t} \theta_2 = \Gamma \omega_2 - \eta \Gamma \omega_4 \quad [10]$$

を得る。ただし、 $\eta' = \eta \Gamma$ である。また、 $\omega_4 = \omega_E$ である。続いて、温度風の関係[2]を第2層に適用すると、

$$f(v_1 - v_3) = \gamma \frac{\partial \theta_2}{\partial r} \quad [11]$$

が得られる。ただし、

$$\gamma = \frac{R}{p_2} \left(\frac{p_2}{p_0} \right)^{\frac{r}{c_p}} \Delta p$$

である。さらに、エクマン境界層上端での風速の円周方向の成分を v_3 で近似すれば、方程式[5]は、

$$\omega_4 = -\epsilon \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_3) \quad [12]$$

と書ける。ただし、 $\epsilon = \frac{p_E}{2}$ である。ここまでの計算により、7 個の変数 u_1 、 u_3 、 v_1 、 v_3 、 ω_2 、 ω_4 、 θ_2 に対して、7 個の方程式[6]～[12]が導かれた。

4. 4 一変数の支配方程式

方程式系[6]～[12]から不安定モードを導出するため、これらの方程式を解いて一変数の支配方程式を導く。はじめに、[8]、[9]、[12]から変数 v_1 、 v_3 、 ω_2 、 ω_4 を消去する。[9]に[8]を代入すると、

$$\omega_4 = -\Delta p \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \{r(u_1 + u_3)\} \quad [13]$$

が得られる。一方、[12]を t で偏微分して[7]を代入すると、

$$\frac{\partial}{\partial t} \omega_4 = f \epsilon \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_3) \quad [14]$$

となる。[13]と[14]より、

$$\Delta p \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial r} \{r(u_1 + u_3)\} + f \epsilon \frac{\partial}{\partial r} (r u_3) = 0$$

が得られる。左辺第1項は、鉛直積分した収束・発散の時間変化、第2項は下層の渦度の時間変化を表していて、収束・発散が下層の渦度と関連していることを示している。この方程式を r で積分すると、

$$\Delta p \frac{\partial}{\partial t} (u_1 + u_3) + f \epsilon u_3 = 0 \quad [15]$$

が得られる。

次に、[10]、[11]から変数 v_1 、 v_3 、 ω_2 、 ω_4 、 θ_2 を消去する。[10]に[8]、[13]を代入すると、

$$\frac{\partial}{\partial t} \theta_2 = -(1-\eta) \Gamma \Delta p \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_1) + \eta \Gamma \Delta p \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_3) \quad [16]$$

が得られる。一方、[11]を t で偏微分して、[6]、[7]を代入すると、

$$f^2 (u_3 - u_1) = \gamma \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial r} \theta_2 \quad [17]$$

となる。[16]を r で偏微分して、[17]に代入すると、

$$f^2 (u_3 - u_1) = -\gamma (1-\eta) \Gamma \Delta p \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_1) \right\} + \gamma \eta \Gamma \Delta p \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_3) \right\} \quad [18]$$

が得られる。[18]の左辺は、円周方向の風の鉛直シアの時間変化、つまり、温度偏差の半径方向の微分の時間変化に対応している。一方、右辺は半径方向の風の収束・発散に伴って生じる、断熱膨張・圧縮の効果とエクマン収束によって供給された潜熱による加熱の効

果の和を表す。大気の温度変化が収束・発散によって生じることを表している。

ここまでの演算によって、2つの変数 u_1 、 u_3 について、2つの偏微分方程式[15]、[18]が得られた。

[18]を t で偏微分すると、

$$-f^2 \frac{\partial}{\partial t} u_1 + \gamma(1-\eta) \Gamma \Delta p \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru_1) \right\} = -f^2 \frac{\partial}{\partial t} u_3 + \gamma \eta \Gamma \Delta p \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru_3) \right\}$$

となる。ここで、[15]を用いて u_1 を消去すると、

$$\begin{aligned} f^2 \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{f\epsilon}{\Delta p} \right) u_3 - \gamma(1-\eta) \Gamma \Delta p \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{f\epsilon}{\Delta p} \right) \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru_3) \right\} \\ = -f^2 \frac{\partial}{\partial t} u_3 + \gamma \eta \Gamma \Delta p \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru_3) \right\} \end{aligned}$$

$$f^2 \left(2 \frac{\partial}{\partial t} + \frac{f\epsilon}{\Delta p} \right) u_3 - \gamma \Gamma \Delta p \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru_3) \right\} - \gamma(1-\eta) \Gamma f \epsilon \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru_3) \right\} = 0$$

となって、両辺を $\gamma \Gamma \Delta p$ で割ると、

$$\left\{ \frac{f\epsilon}{\Delta p} (\eta-1) - \frac{\partial}{\partial t} \right\} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru_3) \right\} + \frac{2f^2}{\gamma \Gamma \Delta p} \left(\frac{f\epsilon}{2\Delta p} + \frac{\partial}{\partial t} \right) u_3 = 0$$

が得られる。ここで、

$$K = \frac{f\epsilon}{\Delta p} = \frac{f p_E}{2\Delta p}$$

$$\lambda^2 = \frac{\gamma \Gamma \Delta p}{2f^2} = \frac{1}{2f^2} \frac{R}{p_2} \left(\frac{p_2}{p_0} \right)^{\frac{R}{C_p}} \Delta p \left(-\frac{d\bar{\theta}}{dp} \right) \Delta p = \frac{1}{2f^2} \left(g \frac{\Delta \bar{\theta}}{\bar{\theta}_2} \right) \left(\left| \frac{dz}{dp} \right|_2 \Delta p \right)$$

とおけば、

$$\left\{ K(\eta-1) - \frac{\partial}{\partial t} \right\} \frac{\partial}{\partial r} \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru_3) \right\} + \frac{1}{\lambda^2} \left(\frac{K}{2} + \frac{\partial}{\partial t} \right) u_3 = 0 \quad [19]$$

と表せる。 K は気圧座標でみた自由大気全層に対するエクマン境界層の割合とコリオリ係数との積である。また、 λ はロスビーの内部変形半径であって、コリオリ係数の逆数に相当する時間に内部重力波が進める距離を表す。典型的な条件では、 $K=2 \times 10^{-6}$ /s、 $\lambda=1 \times 10^6$ mである。さらに、 r を λ で規格化して、 $r=\lambda r_*$ とおけば、

$$\left\{ K(\eta-1) - \frac{\partial}{\partial t} \right\} \frac{1}{\lambda} \frac{\partial}{\partial r_*} \left\{ \frac{1}{\lambda r_*} \frac{1}{\lambda} \frac{\partial}{\partial r_*} (\lambda r_* u_3) \right\} + \frac{1}{\lambda^2} \left(\frac{K}{2} + \frac{\partial}{\partial t} \right) u_3 = 0$$

となって、

$$\left\{ K(\eta-1) - \frac{\partial}{\partial t} \right\} \frac{\partial}{\partial r_*} \left\{ \frac{1}{r_*} \frac{\partial}{\partial r_*} (r_* u_3) \right\} + \left(\frac{K}{2} + \frac{\partial}{\partial t} \right) u_3 = 0$$

が得られる。あらためて r_* を r とおけば、

$$\left\{K(\eta-1)-\frac{\partial}{\partial t}\right\}\frac{\partial}{\partial r}\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(ru_3)\right\}+\left(\frac{K}{2}+\frac{\partial}{\partial t}\right)u_3=0 \quad [20]$$

が得られる。[20]は一変数 u_3 のみで表した支配方程式である。

4. 5 不安定の条件

ここで、[20]に不安定モードが存在するための条件を考える。

$$u_3=\hat{u}_3\exp(\sigma t)$$

とにおいて、[20]に代入すると、

$$\{K(\eta-1)-\sigma\}\frac{d}{dr}\left\{\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r\hat{u}_3)\right\}+\left(\frac{K}{2}+\sigma\right)\hat{u}_3=0 \quad [21]$$

が得られる。[21]の両辺に $r\hat{u}_3^*$ をかけて、 $r=0$ から $r=\infty$ まで積分すると、

$$\{K(\eta-1)-\sigma\}\int_0^\infty(r\hat{u}_3^*)\frac{d}{dr}\left\{\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r\hat{u}_3)\right\}dr+\left(\frac{K}{2}+\sigma\right)\int_0^\infty r\hat{u}_3^*\hat{u}_3dr=0 \quad [22]$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned} \int_0^\infty(r\hat{u}_3^*)\frac{d}{dr}\left\{\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r\hat{u}_3)\right\}dr &= -\int_0^\infty\left|\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r\hat{u}_3)\right|^2rdr \\ \int_0^\infty r\hat{u}_3^*\hat{u}_3dr &= \int_0^\infty|\hat{u}_3|^2rdr \end{aligned}$$

であることを考慮して、

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^\infty\left|\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r\hat{u}_3)\right|^2rdr \\ I_2 &= \int_0^\infty|\hat{u}_3|^2rdr \end{aligned}$$

とおく。ただし、 $I_1>0$ 、 $I_2>0$ である。これらを[22]に代入すると、

$$\{K(\eta-1)-\sigma\}I_1=\left(\frac{K}{2}+\sigma\right)I_2 \quad [23]$$

が得られる。ここで、両辺の実部に注目すると、

$$\{K(\eta-1)-\sigma_r\}I_1=\left(\frac{K}{2}+\sigma_r\right)I_2 \quad [24]$$

が得られる。ただし、 σ_r は σ の実部である。ここでは時間とともに成長する不安定モードを考えているので $\sigma_r>0$ である。 I_1 、 I_2 はともに正だから、右辺は正である。 $\eta\leq 1$ のときには、左辺が負になるので[24]は成り立たない。つまり、 $\eta\leq 1$ であれば不安定モードは存在しない。言いかえると、不安定モードが存在するためには、 $\eta>1$ でなければならない。これは、不安定モードが存在するための必要条件である。

4. 6 上昇流域と下降流域における支配方程式

ここで、支配方程式[21]を用いて不安定モードの構造を求める。本来、エクマン収束に伴う潜熱加熱の係数 η は、 $\omega_4<0$ つまり上昇流のときは $\eta>0$ である、 $\omega_4>0$ つまり下降

流のときは $\eta=0$ である。そこで、 $r=a$ より内側は上昇流域、外側は下降流域とする。このとき、 $r<a$ ではエクマン収束に伴う潜熱加熱の係数は $\eta>0$ 、 $r>a$ では $\eta=0$ となる。しかし、全区間にわたって係数 η が 1 以下であれば不安定モードは存在しないことがわかっていて、したがって、 $r<a$ での係数は $\eta>1$ でなければならない。区間 $r<a$ と $r>a$ において、[21]は、それぞれ、

$$\left\{ K(\eta-1)-\sigma \right\} \frac{d}{dr} \left\{ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r \hat{u}_3) \right\} + \left(\frac{K}{2} + \sigma \right) \hat{u}_3 = 0 \quad (r < a) \quad [25]$$

$$(-K-\sigma) \frac{d}{dr} \left\{ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r \hat{u}_3) \right\} + \left(\frac{K}{2} + \sigma \right) \hat{u}_3 = 0 \quad (r > a) \quad [26]$$

と書ける。

また、 $r=0$ および $r \rightarrow \infty$ における境界条件として、

$$\hat{u}_3 = 0 \quad (r=0) \quad [27]$$

$$\hat{u}_3 \rightarrow 0 \quad (r \rightarrow \infty) \quad [28]$$

が成り立つ。

さらに、上昇流域と下降流域との境界 $r=a$ における[25]の解と[26]の解の接続条件を考える。 $r=a$ で ω が有限な値を持つためには、連続の式[3]より、 $\hat{u}_3$ は連続でなければならない。つまり、

$$\hat{u}_3|_{r=a-0} = \hat{u}_3|_{r=a+0} \quad [29]$$

である。また、 $r=a$ で v が有限な値を持つためには、温度風の関係[2]より、 θ は連続でなければならない。したがって、[10]より、

$$\omega_2 - \eta \omega_4|_{r=a-0} = \omega_2|_{r=a+0} \quad [30]$$

となる。[8]、[9]を代入すると、

$$-(1-\eta) \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_1) + \eta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_3) \Big|_{r=a-0} = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_1) \Big|_{r=a+0} \quad [31]$$

が得られる。一方、[12]に[8]、[9]を代入すると、

$$\left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_1) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_3) \right\} \Delta p = \epsilon \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_3)$$

となる。両辺を t で偏微分して、[7]を代入すると、

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_1) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_3) \right\} = -K \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_3)$$

が得られ、

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r \hat{u}_1) = -\left(1 + \frac{K}{\sigma} \right) \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r \hat{u}_3) \quad [32]$$

となる。[31]に[32]を代入すると、

$$\left\{ \sigma + K(1-\eta) \right\} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r \hat{u}_3) \Big|_{r=a-0} = (\sigma + K) \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r \hat{u}_3) \Big|_{r=a+0}$$

つまり、

$$\left\{ \sigma + K(1-\eta) \right\} \left(\frac{d\hat{u}_3}{dr} + \frac{\hat{u}_3}{r} \right) \bigg|_{r=a-0} = \left(\sigma + K \right) \left(\frac{d\hat{u}_3}{dr} + \frac{\hat{u}_3}{r} \right) \bigg|_{r=a+0} \quad [33]$$

が得られる。[29]と[33]が $r=a$ における接続条件である。

さらに、区間 $r < a$ では $\omega_4 < 0$ 、 $r > a$ では $\omega_4 > 0$ だから、[12]と[7]より、

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r \hat{u}_3) &> 0 \quad (r < a) \\ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r \hat{u}_3) &< 0 \quad (r > a) \end{aligned} \quad [34]$$

である。[33]を考慮すると、

$$\sigma + K(1-\eta) < 0$$

つまり、

$$\sigma < K(\eta - 1) \quad [35]$$

が得られる。

4. 7 上昇流域と下降流域における支配方程式

さて、区間 $r > a$ において、 $\hat{u}_3$ についての微分方程式[26]は、

$$\frac{d}{dr} \left\{ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (ru) \right\} + \mu u = 0 \quad [36]$$

のように変形できる。ただし、

$$\mu = \mu_2 = -\frac{\frac{K}{2} + \sigma}{K + \sigma} \quad [37]$$

であり、常に $\mu_2 < 0$ である。したがって、微分方程式[36]は変形されたベッセルの微分方程式に帰着できる。ゆえに、第1種変形ベッセル関数と第2種変形ベッセル関数が[36]を満たすが、境界条件[28]より、第2種ベッセル関数 $K_1(\sqrt{-\mu_2}r)$ が解となる。つまり、

$$\hat{u}_3 = C_2 K_1(\sqrt{-\mu_2}r) \quad (r > a) \quad [38]$$

である。

次に、区間 $r < a$ における解を検討する。微分方程式[25]を[36]のように変形したとき、

$$\mu = \mu_1 = \frac{\frac{K}{2} + \sigma}{K(\eta - 1) - \sigma} \quad [39]$$

であり、[35]より $\mu_1 > 0$ である。したがって、微分方程式[36]は変形されたベッセルの微分方程式に帰着できる。ゆえに、ベッセル関数とノイマン関数が[36]を満たすが、境界条件[27]より、ベッセル関数 $J_1(\sqrt{\mu_1}r)$ が解となる。つまり、

$$\hat{u}_3 = C_1 J_1(\sqrt{\mu_1}r) \quad (r < a) \quad [40]$$

である。

ここで、[40]と[38]に接続条件を適用する。まず、[29]より、

$$C_1 J_1(\sqrt{\mu_1} a) = C_2 K_1(\sqrt{-\mu_2} a) \quad [41]$$

が成り立つ。次に、[33]に、[40]と[38]を代入して、

$$\begin{aligned} & \left\{ \sigma + K(1-\eta) \right\} C_1 \sqrt{\mu_1} \left\{ J_1'(\sqrt{\mu_1} a) + \frac{J_1(\sqrt{\mu_1} a)}{\sqrt{\mu_1} a} \right\} \\ &= (\sigma + K) C_2 \sqrt{-\mu_2} \left\{ K_1'(\sqrt{-\mu_2} a) + \frac{K_1(\sqrt{-\mu_2} a)}{\sqrt{-\mu_2} a} \right\} \end{aligned}$$

となるが、[39]、[37]より、

$$C_1 \frac{1}{\sqrt{\mu_1}} \left\{ J_1'(\sqrt{\mu_1} a) + \frac{J_1(\sqrt{\mu_1} a)}{\sqrt{\mu_1} a} \right\} = C_2 \frac{1}{\sqrt{-\mu_2}} \left\{ K_1'(\sqrt{-\mu_2} a) + \frac{K_1(\sqrt{-\mu_2} a)}{\sqrt{-\mu_2} a} \right\} \quad [42]$$

が得られる。[41]、[42]より、

$$\frac{1}{\sqrt{\mu_1}} \frac{J_1'(\sqrt{\mu_1} a) + \frac{J_1(\sqrt{\mu_1} a)}{\sqrt{\mu_1} a}}{J_1(\sqrt{\mu_1} a)} = \frac{1}{\sqrt{-\mu_2}} \frac{K_1'(\sqrt{-\mu_2} a) + \frac{K_1(\sqrt{-\mu_2} a)}{\sqrt{-\mu_2} a}}{K_1(\sqrt{-\mu_2} a)} \quad [43]$$

が導かれる。ここで、

$$\frac{d^2}{dx^2} J_0(x) + \frac{1}{x} \frac{d}{dx} J_0(x) + J_0(x) = 0$$

の両辺を x で微分すると、

$$\frac{d^2}{dx^2} \frac{d}{dx} J_0(x) + \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \frac{d}{dx} J_0(x) + \left(1 - \frac{1}{x^2} \right) \frac{d}{dx} J_0(x) = 0$$

となるから、 $J_0'(x)$ を $J_1(x)$ とみなすことができる。実際には、係数の定義上、

$$J_0'(x) = -J_1(x)$$

である。同様に、

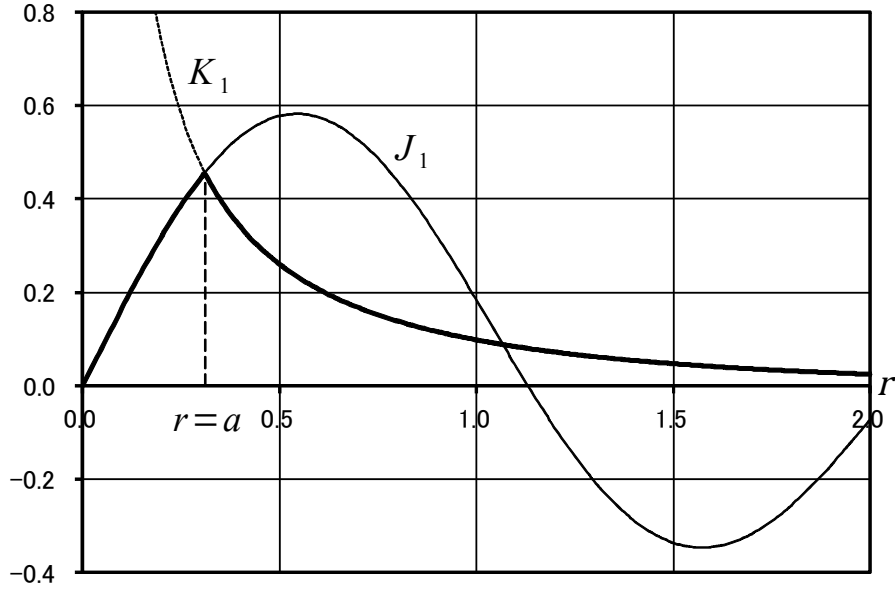
$$K_0'(x) = -K_1(x)$$

も成り立つ。これらを考慮すると、[43]は、

$$\frac{1}{\sqrt{\mu_1}} \frac{J_0(\sqrt{\mu_1} a)}{J_1(\sqrt{\mu_1} a)} = \frac{1}{\sqrt{-\mu_2}} \frac{K_0(\sqrt{-\mu_2} a)}{K_1(\sqrt{-\mu_2} a)} \quad [44]$$

と書くこともできる。[35]を満たす範囲で σ の値を与えると、[39]と[37]から μ_1 と μ_2 の値が求まる。さらに、[43]から a の値が求まり、[41]から C_2/C_1 が決まる。

以下に、 $\eta=3$ 、 $\sigma=1.8K$ の場合の $\hat{u}_3$ の分布を示す。[35]より最大成長率は $\sigma_{max}=2K$ なので、この分布が最大成長率に近い成長率をもつ不安定モードである。 r はロスビーの内部変形半径によって規格化されているので、注意する。



$\hat{u}_3$ の分布

上昇流域の外側 ($r > a$) では、熱帯低気圧の中心に近づくにつれて風速は加速度的に大きくなる。上昇流域 ($r < a$) に入ると、逆に中心に近づくにつれて風速は小さくなることがわかる。

次に、鉛直流の分布を求める。 $\omega_4 = \hat{\omega}_4 \exp(\sigma t)$ とおき、 r が λ によって規格化されていることを考慮すると、[14]より、

$$\hat{\omega}_4 = \frac{f\epsilon}{\sigma\lambda} \frac{1}{r} \frac{d}{dr}(r\hat{u}_3) = \frac{f\epsilon}{\sigma\lambda} \left(\frac{d\hat{u}_3}{dr} + \frac{\hat{u}_3}{r} \right) \quad [45]$$

となる。 $r < a$ において、 $\hat{u}_3 = C_1 J_1(\sqrt{\mu_1} r)$ を代入すると、

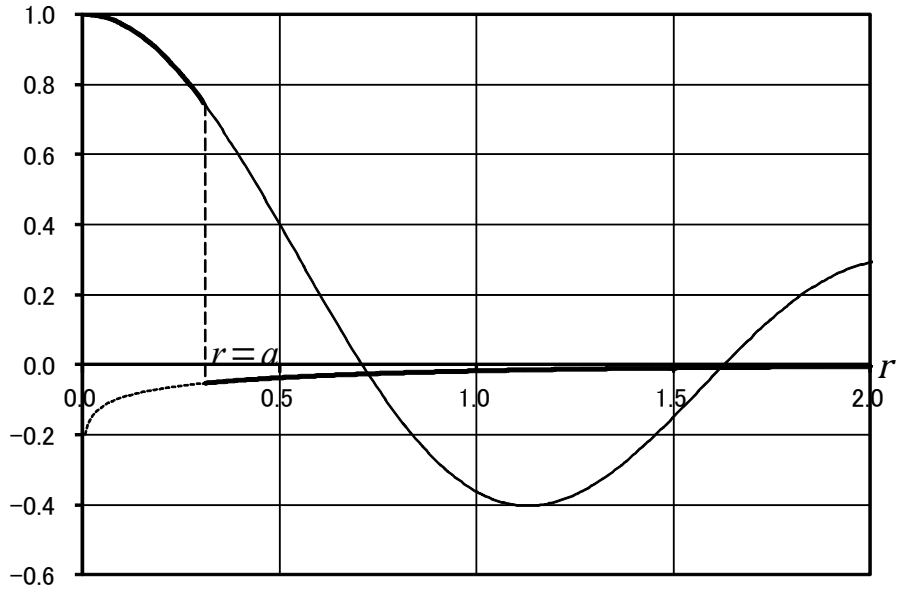
$$\begin{aligned} \hat{\omega}_4 &= \frac{f\epsilon}{\sigma\lambda} C_1 \sqrt{\mu_1} \left\{ J_1'(\sqrt{\mu_1} r) + \frac{J_1(\sqrt{\mu_1} a)}{\sqrt{\mu_1} r} \right\} \\ &= -\frac{f\epsilon}{\sigma\lambda} C_1 \sqrt{\mu_1} \left\{ J_0''(\sqrt{\mu_1} r) + \frac{J_0'(\sqrt{\mu_1} r)}{\sqrt{\mu_1} a} \right\} \\ &= \frac{f\epsilon}{\sigma\lambda} C_1 \sqrt{\mu_1} J_0(\sqrt{\mu_1} r) \end{aligned} \quad [46]$$

が得られる。同様に、 $r > a$ において、 $\hat{u}_3 = C_2 K_1(\sqrt{-\mu_2} r)$ を代入すると、

$$\hat{\omega}_4 = -\frac{f\epsilon}{\sigma\lambda} C_2 \sqrt{-\mu_2} K_0(\sqrt{-\mu_2} r) \quad [47]$$

となる。以下に、 $\hat{\omega}_4$ の分布を示す。上昇流域内 ($r < a$) ではエクマン収束に対応する上昇流がみられる。一方、上昇流域の外側 ($r > a$) では、比較的弱い下降流が生じている。

円筒座標であることを考慮して $\hat{\omega}_4$ を領域全体で積分するとゼロになる。



$\hat{\omega}_4$ の分布

さらに、下層の気圧 Φ_3 の分布を求める。 $\Phi_3 = \hat{\Phi}_3 \exp(\sigma t)$ とおき、 r が λ によって規格化されていることを考慮すると、地衡風平衡より、

$$\frac{d}{dr} \hat{\Phi}_3 = f \lambda \hat{v}_3$$

が成り立つ。ここで、[7]より、

$$\frac{d}{dr} \hat{\Phi}_3 = -\frac{f^2 \lambda}{\sigma} \hat{u}_3 \quad [48]$$

となる。 $r > a$ において、[48]に $\hat{u}_3 = C_2 K_1(\sqrt{-\mu_2} r)$ を代入すると、

$$\frac{d}{dr} \hat{\Phi}_3 = -\frac{f^2 \lambda}{\sigma} C_2 K_1(\sqrt{-\mu_2} r)$$

となる。 $r \rightarrow \infty$ で $\hat{\Phi}_3 \rightarrow 0$ であることを考慮して、 r について積分すると、

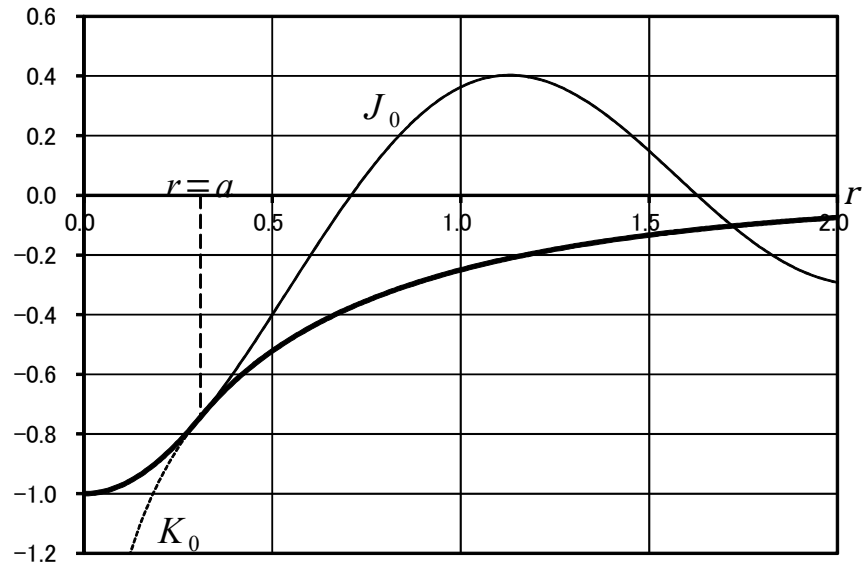
$$\hat{\Phi}_3 = \frac{f^2 \lambda}{\sigma} \frac{C_2}{\sqrt{-\mu_2}} K_0(\sqrt{-\mu_2} r) \quad [49]$$

が得られる。一方、 $r < a$ において、[48]に $\hat{u}_3 = C_1 J_1(\sqrt{\mu_1} r)$ を代入し、 $r=0$ で $\hat{\Phi}_3$ が有限な値をとることと、 $r=a$ で[49]と連続であることを考慮して、 r について積分すると、

$$\hat{\Phi}_3 = \frac{f^2 \lambda}{\sigma} \frac{C_2}{\sqrt{\mu_1}} J_0(\sqrt{\mu_1} r) \quad [50]$$

となる。以下に、 $\hat{\Phi}_3$ の分布を示す。中心に近づくにつれて気圧が低くなっていることが

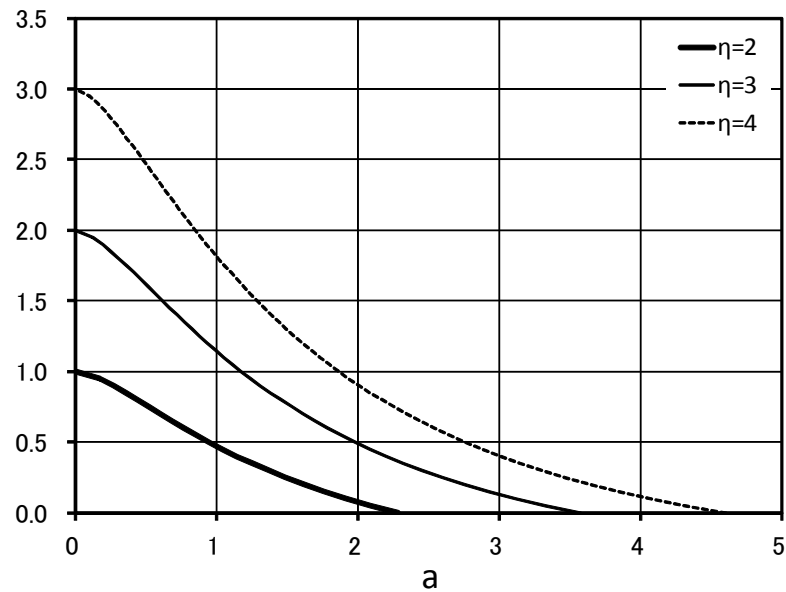
確かめられる。



$\hat{\phi}_3$ の分布

4. 8 上昇流域の半径と成長率

上昇流域の半径 a と成長率 $\frac{\sigma}{K}$ との関係を次の図に示す。上昇流域の半径はあらかじめ変形半径 λ で規格化されている。また、成長率 σ は K で規格化されている。



上昇流域の半径と成長率との関係

エクマン収束に伴う潜熱加熱の係数 η が大きいほうが成長率が大きくなる。また、成長するためには上昇流域の半径に上限があり、上昇流域の半径が小さいほど成長率は大きくなる。この結果は、上昇流域が小さければ小さいほどじょう乱が速く成長することを示しているが、現実の熱帯低気圧の発達とは整合しない。現実の大気においては、小さいじょう乱ほど粘性の影響を受けやすいことや、有限の振幅では非線形の効果効くことなどにより、一定の大きさを持ったじょう乱が成長していると考えられる。典型的な条件として、 $K=2\times 10^{-6}$ /s、 $\lambda=1\times 10^6$ m、 $\eta=3$ とすると、最大成長率のじょう乱が e 倍に成長するのにかかる時間は約 3 日である。

補遺 ベッセル関数

一般に、微分方程式

$$\frac{d}{dr} \left\{ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (ru) \right\} + \mu u = 0 \quad [1]$$

の解を考える。[1]を変形すると、

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} + \left(\mu - \frac{1}{r^2} \right) u = 0 \quad [2]$$

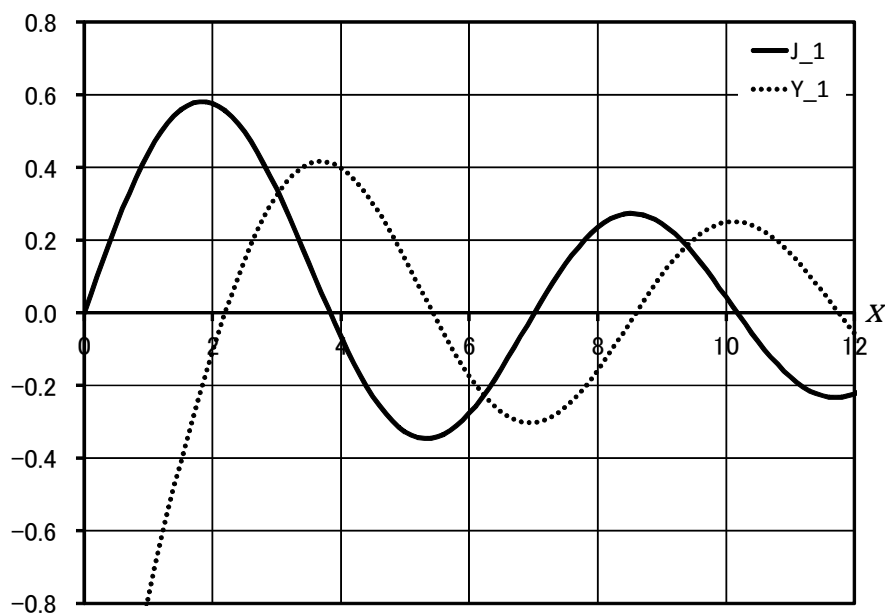
または

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{du}{dr} \right) - \frac{u}{r^2} = -\mu u$$

のように書ける。この微分方程式は、 $\mu > 0$ の場合には、 $x = \sqrt{\mu} r$ とおくことによって、

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{du}{dx} + \left(1 - \frac{n^2}{x^2} \right) u = 0 \quad [3]$$

のように変形できる。この方程式を**ベッセルの微分方程式**(Bessel's differential equation)という。方程式[2]はベッセルの微分方程式で $n=1$ の場合に相当する。一般にベッセルの微分方程式の解は**ベッセル関数**(Bessel function) $J_n(x)$ と**ノイマン関数**(Neumann function) $Y_n(x)$ である。



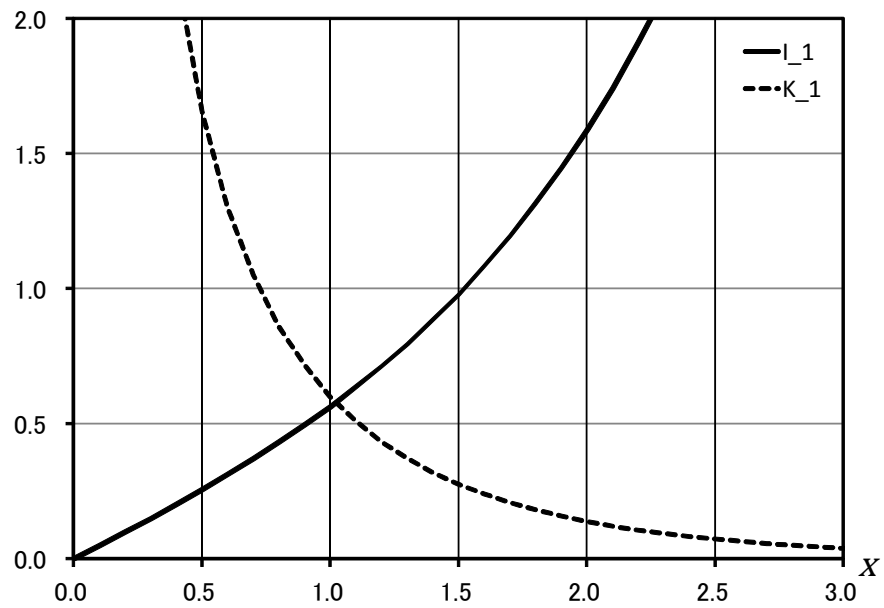
ベッセル関数 $J_1(x)$ とノイマン関数 $Y_1(x)$

また、 $\mu < 0$ の場合には、 $x = \sqrt{-\mu} r$ とおくことによって、

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{du}{dx} - \left(1 + \frac{n^2}{x^2} \right) u = 0 \quad [4]$$

のように変形できる。この方程式を**変形されたベッセルの微分方程式**(modified Bessel's differential equation)という。 $\mu < 0$ のときには、方程式[2]は変形されたベッセルの微分方程

式で $n=1$ の場合に相当する。変形されたベッセルの微分方程式の解は**第1種変形ベッセル関数**(modified Bessel function of the first kind) $I_n(x)$ と **第2種変形ベッセル関数**(modified Bessel function of the second kind) $K_n(x)$ である。



第1種変形ベッセル関数 $I_n(x)$ と第2種変形ベッセル関数 $K_n(x)$

参考文献：

Ogura, Y., 1964: Frictionally controlled, thermally driven circulations in a circular vortex with application to tropical cyclones. *J. Atmos. Sci.*, **21**, 610-621.

小倉義光, 1978: 気象力学通論. 東京大学出版会, 249pp.