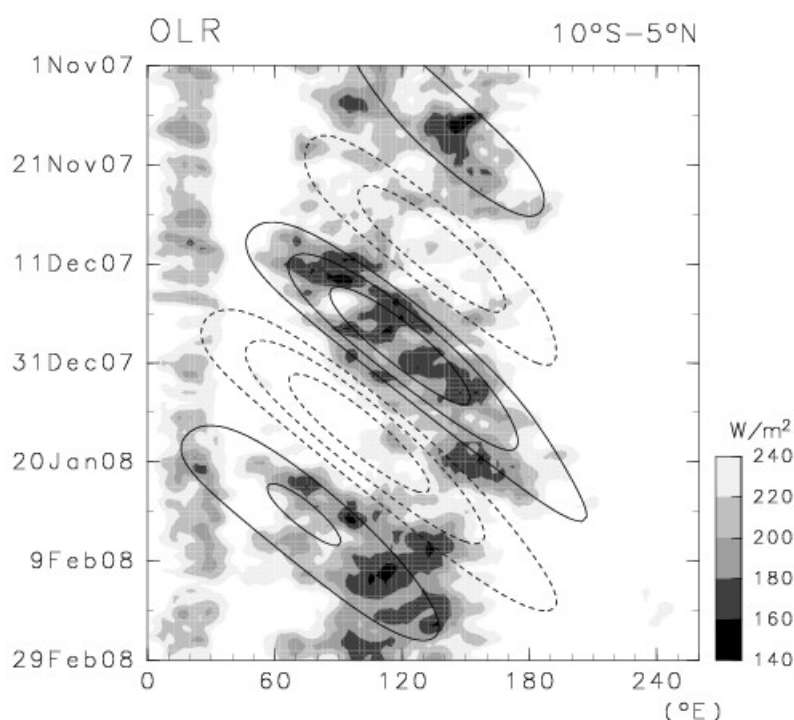


3 赤道波

下の図は赤道上での積雲対流の時間変化を解析したものである。横軸は経度、縦軸は時間であり、120 日間の**外向き長波放射**(outgoing longwave radiation; OLR)の変動の様子を図示している。OLR が低い場所は雲頂高度の高い雲が存在する場所であり、積雲対流が活発であることを示す。積雲対流の活発な領域が数 m/s 程度のゆっくりとした速度で東進していく様子がわかる。このような大規模な積雲対流の東進は赤道上ではしばしばみられ、**マッデン-ジュリアン振動**(Madden-Julian oscillation; MJO)とよばれる。MJO は典型的には 40～50 日程度の周期を持ち、**季節内変動**(intraseasonal variability; ISV)とよばれることがある。赤道域では MJO 以外にも東西に伝播するさまざまな波動が検出される。ここでは、浅水方程式系を赤道域の大気の運動に適用して、赤道上で見られる波動の性質を調べる。



(NOAA による OLR データを用いて作成)

赤道上での積雲対流の時間-経度断面

3. 1 基本方程式系

第 1 傾圧モードの水平構造と時間変化を記述する浅水方程式系は、

$$\frac{\partial}{\partial t} u = f v - \frac{\partial}{\partial x} \Phi \quad [1]$$

$$\frac{\partial}{\partial t} v = -f u - \frac{\partial}{\partial y} \Phi \quad [2]$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \Phi = g H \left(\frac{\partial}{\partial x} u + \frac{\partial}{\partial y} v \right) \quad [3]$$

と書ける。ただし、 u 、 v 、 Φ はそれぞれ、東西風、南北風、ジオポテンシャルである。また、 f はコリオリ係数、 g は重力加速度、 H は等価深度である。

3. 2 赤道ベータ平面

地球の自転角速度を Ω 、緯度を ϕ とすると、コリオリ係数は、

$$f = 2\Omega \sin \phi \quad [4]$$

と書けるが、赤道付近では、

$$f \simeq \beta y \quad [5]$$

と近似することができる。ただし、

$$\beta = \left. \frac{df}{dy} \right|_{y=0} = \frac{2\Omega \cos \phi}{R_e} \quad [6]$$

であり、 R_e は地球の半径である。このような条件を**赤道ベータ平面**(equatorial β -plain)という。これを[1]～[3]に代入すると、

$$\frac{\partial}{\partial t} u = \beta y v - \frac{\partial}{\partial x} \Phi \quad [7]$$

$$\frac{\partial}{\partial t} v = -\beta y u - \frac{\partial}{\partial y} \Phi \quad [8]$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \Phi = -gH \left(\frac{\partial}{\partial x} u + \frac{\partial}{\partial y} v \right) \quad [9]$$

が得られる。

3. 3 赤道ケルビン波

まず、赤道ベータ平面における浅水方程式系[7]～[9]を、 $v=0$ という条件のもとで解く。[7]～[9]に $v=0$ を代入すると、

$$\frac{\partial}{\partial t} u = -\frac{\partial}{\partial x} \Phi \quad [10]$$

$$0 = -\beta y u - \frac{\partial}{\partial y} \Phi \quad [11]$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \Phi = -gH \frac{\partial}{\partial x} u \quad [12]$$

となる。ここで、東西、時間方向には波型を仮定して、

$$u = \hat{u}(y) \exp[i(kx - \omega t)] \quad [13]$$

$$\Phi = \hat{\Phi}(y) \exp[i(kx - \omega t)] \quad [14]$$

とおく。ただし、 $\omega > 0$ とする。このとき、[10]～[12]は、

$$-i\omega \hat{u} = -ik \hat{\Phi} \quad [15]$$

$$0 = -\beta y \hat{u} - \frac{d}{dy} \hat{\Phi} \quad [16]$$

$$-i\omega \hat{\Phi} = -igHk \hat{u} \quad [17]$$

となる。

[15]、[17]より、 $\hat{\phi}$ を消去すると、

$$\omega^2 \hat{u} = gHk^2 \hat{u}$$

となって、**分散関係式**(dispersion relationship)

$$\omega = \sqrt{gH} |k| \quad [18]$$

が得られる。ここで、[15]、[18]より、

$$\hat{u} = \frac{k}{\omega} \hat{\phi} = \pm \frac{1}{\sqrt{gH}} \hat{\phi}$$

だから、[16]は、

$$\frac{d}{dy} \hat{\phi} = \mp \frac{\beta}{\sqrt{gH}} y \hat{\phi} \quad [19]$$

と書ける。[19]の解は、

$$\hat{\phi} = C \exp \left[\mp \frac{\beta}{2\sqrt{gH}} y^2 \right] \quad (C \text{ は任意の定数}) \quad [20]$$

である。いまは赤道付近に捕捉された波動を調べているので、 $y \rightarrow \pm\infty$ で $\hat{\phi} \rightarrow 0$ である。したがって、解の南北構造は

$$\hat{\phi} = C \exp \left[-\frac{\beta}{2\sqrt{gH}} y^2 \right] \quad [21]$$

であり、分散関係式は、

$$\omega = \sqrt{gH} k \quad [22]$$

である。位相速度 c は、

$$c = \frac{\omega}{k} = \sqrt{gH} \quad [23]$$

であり、東西波数 k によらず、一定の速さ $\sqrt{gH}$ で東進する波動であることがわかる。この波動を**赤道ケルビン波**(equatorial Kelvin wave)という。 $g=9.8 \text{ m/s}^2$ 、 $H=80 \text{ m}$ のとき、位相速度 c は $c=28 \text{ m/s}$ である。

[21]より、気圧偏差は赤道で極大となり、赤道から離れるにしたがって減衰していくことがわかる。 $y = \sqrt{\frac{\sqrt{gH}}{\beta}}$ で、 $\exp \left[-\frac{1}{2} \right]$ 倍に減衰するが、このときの y の値

$$L = \sqrt{\frac{\sqrt{gH}}{\beta}} \quad [24]$$

を**赤道変形半径**(equatorial radius of deformation)という。赤道から赤道変形半径だけ離れた場所の慣性周期（厳密には慣性周期の $\frac{1}{2\pi}$ 倍 $= \frac{1}{f}$ ）の間に浅水波（位相速度 $\sqrt{gH}$ ）が進行する距離は赤道変形半径に等しい。 $g=9.8 \text{ m/s}^2$ 、 $H=80 \text{ m}$ 、 $\beta=2.3 \times 10^{-11} / \text{m s}$ のとき、赤道変形半径 L は $L=1.1 \times 10^6 \text{ m}$ であり、赤道波の南北スケールは緯度 10 度程度であることがわかる。 y を赤道変形半径 L で規格化して、

$$y_* = \frac{y}{L} \quad [25]$$

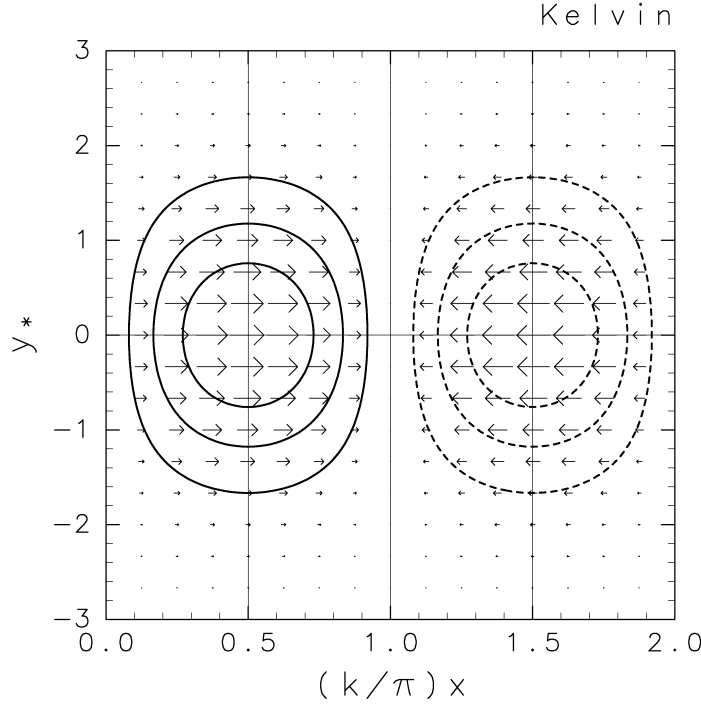
とすれば、[21]は

$$\hat{\Phi} = C \exp\left[-\frac{1}{2} y_*^2\right] \quad [26]$$

と書ける。このとき、[15]より、

$$\hat{u} = \frac{k}{\omega} \hat{\Phi} = C \frac{1}{\sqrt{gH}} \exp\left[-\frac{1}{2} y_*^2\right] \quad [27]$$

である。[26]、[27]より、赤道ケルビン波の水平構造を図示すると次のようになる。



赤道ケルビン波の水平構造

気圧偏差と東西風は赤道について対称な構造を持っていることがわかる。

3. 4 赤道ケルビン波以外の赤道波

次に、赤道ベータ平面における浅水方程式系[7]～[9]を、 $v \neq 0$ という条件のもとで解く。
[13]、[14]と同様に、東西、時間方向には波型を仮定すると、[7]～[9]は

$$-i\omega \hat{u} = \beta y \hat{v} - ik \hat{\Phi} \quad [28]$$

$$-i\omega \hat{v} = -\beta y \hat{u} - \frac{d}{dy} \hat{\Phi} \quad [29]$$

$$-i\omega \hat{\Phi} = -gH \left(ik \hat{u} + \frac{d}{dy} \hat{v} \right) \quad [30]$$

と書ける。[28]に[30]を代入して $\hat{\Phi}$ を消去すると、

$$-i\omega \hat{u} = \beta y \hat{v} - gH \left(i \frac{k^2}{\omega} \hat{u} + \frac{k}{\omega} \frac{d}{dy} \hat{v} \right)$$

$$i\left(gH\frac{k^2}{\omega}-\omega\right)\hat{u}=\left(\beta y-gH\frac{k}{\omega}\frac{d}{dy}\right)\hat{v} \quad [31]$$

が得られ、一方、[29]に[30]を代入して $\hat{\phi}$ を消去すると、

$$\begin{aligned} -i\omega\hat{v} &= -\beta y\hat{u} - gH\left(\frac{k}{\omega}\frac{d}{dy}\hat{u} - i\frac{1}{\omega}\frac{d^2}{dy^2}\hat{v}\right) \\ \left(\beta y + gH\frac{k}{\omega}\frac{d}{dy}\right)\hat{u} &= i\left(\omega + gH\frac{1}{\omega}\frac{d^2}{dy^2}\right)\hat{v} \end{aligned} \quad [32]$$

が得られる。[31]、[32]より、 $\hat{u}$ を消去すると、

$$\begin{aligned} \left(\beta y + gH\frac{k}{\omega}\frac{d}{dy}\right)\left(\beta y - gH\frac{k}{\omega}\frac{d}{dy}\right)\hat{v} &= -\left(gH\frac{k^2}{\omega}-\omega\right)\left(\omega + gH\frac{1}{\omega}\frac{d^2}{dy^2}\right)\hat{v} \\ \left[\left(gH\frac{k}{\omega}\frac{d}{dy} + \beta y\right)\left(gH\frac{k}{\omega}\frac{d}{dy} - \beta y\right) + \left(\omega - gH\frac{k^2}{\omega}\right)\left(\omega + gH\frac{1}{\omega}\frac{d^2}{dy^2}\right)\right]\hat{v} &= 0 \\ \left[gH\frac{d^2}{dy^2} + \left(\omega^2 - gHk^2 - \beta gH\frac{k}{\omega}\right) - \beta^2 y^2\right]\hat{v} &= 0 \end{aligned} \quad [33]$$

となる。ここで、 y 、 k を赤道変形半径で規格化すると、

$$\begin{aligned} \left[\beta\sqrt{gH}\frac{d^2}{dy_*^2} + \left(\omega^2 - \beta\sqrt{gH}k_*^2 - \beta^{2/3}(gH)^{3/4}\frac{k_*}{\omega}\right) - \beta\sqrt{gH}y_*^2\right]\hat{v} &= 0 \\ \left[\frac{d^2}{dy_*^2} + \left(\frac{1}{\beta\sqrt{gH}}\omega^2 - k_*^2 - \sqrt{\beta\sqrt{gH}}\frac{k_*}{\omega}\right) - y_*^2\right]\hat{v} &= 0 \end{aligned} \quad [34]$$

が得られる。さらに、 ω を $\sqrt{\beta\sqrt{gH}}$ で規格化すると、

$$\left[\frac{d^2}{dy_*^2} + \left(\omega_*^2 - k_*^2 - \frac{k_*}{\omega_*}\right) - y_*^2\right]\hat{v} = 0 \quad [35]$$

と表せる。

いまは赤道付近に捕捉された波動を調べているので、[35]の境界条件は、 $y_* \rightarrow \pm\infty$ で $\hat{v} \rightarrow 0$ である。この条件のもとで、微分方程式[35]を解くと、

$$\begin{aligned} \omega_*^2 - k_*^2 - \frac{k_*}{\omega_*} &= 1 \quad \text{のとき、} \quad \hat{v} = \exp\left[-\frac{1}{2}y_*^2\right] \\ \omega_*^2 - k_*^2 - \frac{k_*}{\omega_*} &= 3 \quad \text{のとき、} \quad \hat{v} = 2y_* \exp\left[-\frac{1}{2}y_*^2\right] \\ \omega_*^2 - k_*^2 - \frac{k_*}{\omega_*} &= 5 \quad \text{のとき、} \quad \hat{v} = (4y_*^2 - 2) \exp\left[-\frac{1}{2}y_*^2\right] \\ &\vdots \end{aligned}$$

となる。一般には、

$$\omega_*^2 - k_*^2 - \frac{k_*}{\omega_*} = 2n + 1 \quad (n \text{ は } 0 \text{ 以上の整数}) \quad [36]$$

のとき、

$$\hat{v} = H_n(y_*) \exp\left[-\frac{1}{2}y_*^2\right] \quad [37]$$

と書ける。ただし、 $H_n(x)$ は n 次の**エルミート多項式**(Hermite polynomial)である。[36]は分散関係を表すが、 ω についての3次方程式になっているので、 n の値を決めて $\hat{v}$ の南北構造が定まっても、ある k の値に対応する ω の値は3個存在する。

$\hat{u}$ と $\hat{\Phi}$ は、[30]、[31]を用いて定められる。[31]より、

$$\begin{aligned} i\left(\frac{k_*^2}{\omega_*} - \omega_*\right)\hat{u} &= \left(y_* - \frac{k_*}{\omega_*} \frac{d}{dy_*}\right)\hat{v} \\ \hat{u} &= i \frac{1}{\omega_*^2 - k_*^2} \left(\omega_* y_* - k_* \frac{d}{dy_*}\right)\hat{v} \end{aligned} \quad [38]$$

が得られる。また、[30]より、

$$\begin{aligned} -i\omega_* \hat{\Phi} &= -\left(ik_* \hat{u} + \frac{d}{dy_*} \hat{v}\right) \\ \hat{\Phi} &= \frac{k_*}{\omega_*} \hat{u} - i \frac{1}{\omega_*} \frac{d}{dy_*} \hat{v} \end{aligned}$$

となり、[38]を代入して、

$$\hat{\Phi} = i \frac{1}{\omega_*^2 - k_*^2} \left(k_* y_* - \omega_* \frac{d}{dy_*}\right)\hat{v} \quad [39]$$

が得られる。

3. 5 混合ロスビー重力波

まず、 $n=0$ のときの解を検討する。分散関係式[36]を解くと、

$$\begin{aligned} \omega_*^3 - k_*^2 \omega_* - \omega_* - k_* &= 0 \\ (\omega + k)(\omega_*^2 - k_* \omega_* - 1) &= 0 \end{aligned} \quad [40]$$

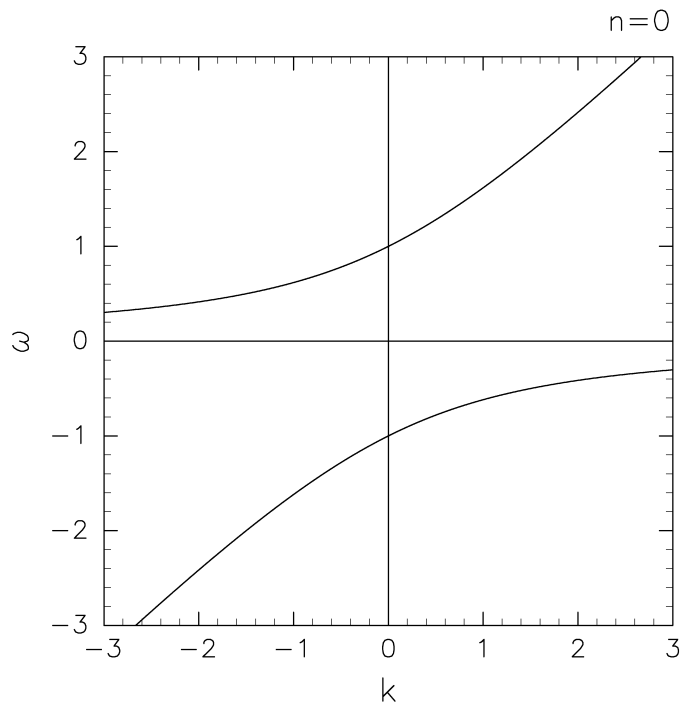
となる。しかし、

$$\omega + k = 0$$

とすると、[38]で $\hat{u}$ が有限な値を持たない。したがって、

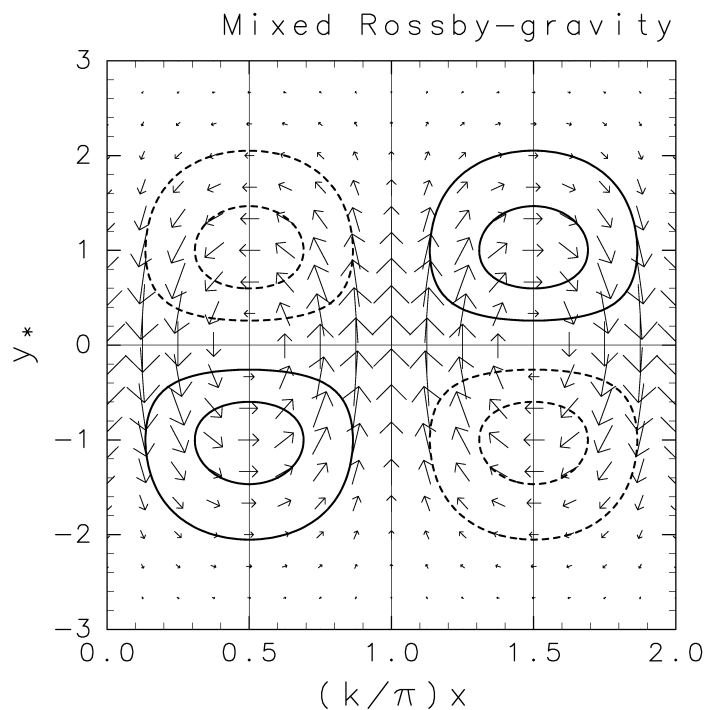
$$\begin{aligned} \omega_*^2 - k_* \omega_* - 1 &= 0 \\ \omega_* &= \frac{1}{2} k_* \pm \sqrt{\frac{1}{4} k_*^2 + 1} \end{aligned} \quad [41]$$

である。分散関係を図示すると次のようになる。



赤道波の分散関係 ($n=0$)

位相速度 $c=\omega/k$ が負の成分は西進し、**混合ロスビー重力波**(mixed Rossby-gravity wave)とよばれる。[38]、[39]より、混合ロスビー重力波の水平構造を図示すると次のようになる。



混合ロスビー重力波の水平構造

気圧偏差と東西風は赤道について反対称な構造を持っていることがわかる。混合ロスビー重力波はロスビー波と重力波が混合したモードとみなされる。一方、位相速度が正の成分

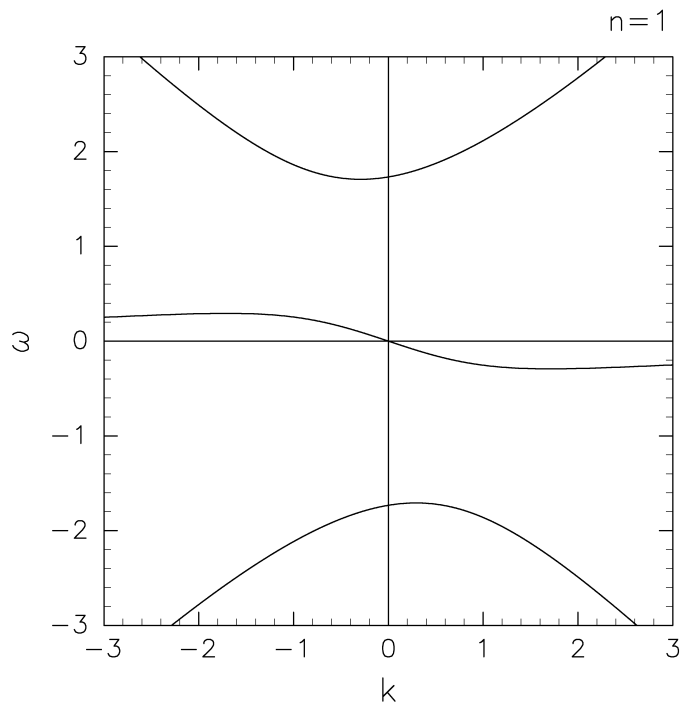
は東進し、**東進慣性重力波**(eastward inertio-gravity wave)とよばれる。

3. 6 赤道ロスビー波

次に、 $n=1$ のときの解を検討する。分散関係式[36]は、

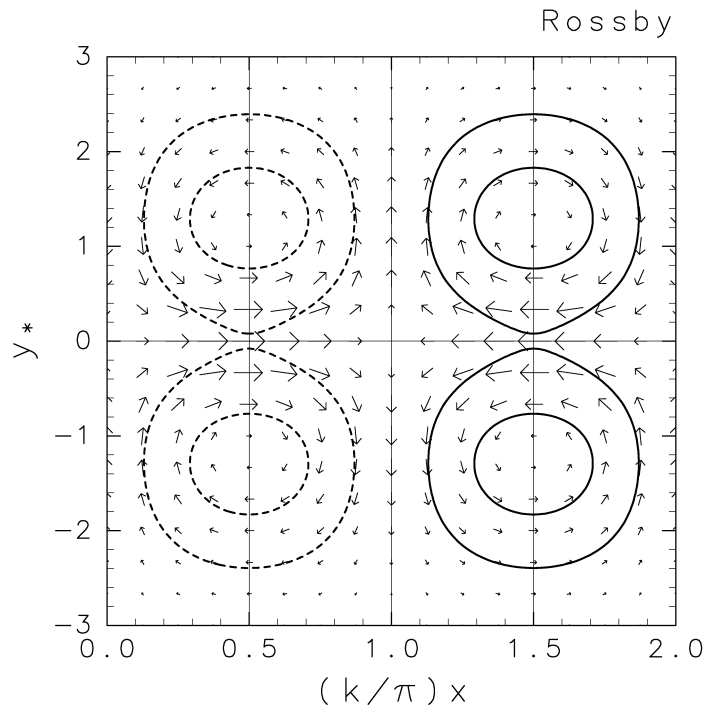
$$\omega_*^3 - k_*^2 \omega_* - 3\omega_* - k_* = 0 \quad [42]$$

となる。3次方程式を解いて分散関係を図示すると次のようになる。



赤道波の分散関係 ($n=1$)

ω がゼロに近い中間の値を持つ解は、位相速度 $c=\omega/k$ が負であり、ゆっくりと西進する成分である。これを**赤道ロスビー波**(equatorial Rossby wave)とよばれる。[38]、[39]より、赤道ロスビー波の水平構造を図示すると次のようになる。



赤道ロスビー波 ($n=1$) の水平構造

赤道ロスビー波は赤道に捕捉されたロスビー波とみなされる。 $n \geq 2$ の場合にも同様のモードが現れるので、区別するために $n=1$ 赤道ロスビー波とよぶことがある。 n が奇数の場合は、気圧偏差と東西風は赤道対称、偶数の場合は赤道反対称である。

ω が絶対値の大きい正や負の値をとる 2 つの解は**慣性重力波**(inertio-gravity wave)に対応する。位相速度 $c = \omega/k$ が正で東進する成分は東進慣性重力波、位相速度が負で西進する成分は**西進慣性重力波**(westward inertio-gravity wave)とよばれる。慣性重力波は赤道ロスビー波と比べて位相速度の絶対値が大きい。東進慣性重力波や西進慣性重力波も、赤道ロスビー波と同じく、 $n \geq 2$ の場合にも同様のモードが現れる。

問 3.1 赤道ケルビン波の位相速度は東西波数 k によらず $c = \sqrt{gH}$ であった。東西波数 k の絶対値がじゅうぶんに小さいとき、赤道対称な波動である赤道ロスビー波 ($n=1$) の位相速度を求め、 g 、 H で表せ。

問 3.2 東西波数 k の絶対値がじゅうぶんに大きいとき、赤道反対称な波動である混合ロスビー重力波と東進慣性重力波 (いずれも $n=0$) の位相速度を求め、 g 、 H で表せ。

補遺 エルミートの微分方程式

関数 $f(x)$ についての微分方程式

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} + m - x^2 \right] f = 0 \quad [1]$$

の解を考える。ただし、 m は定数である。また、境界条件を、

$$f(x) \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow \pm\infty) \quad [2]$$

とする。ここで、

$$f(x) = F(x) \exp\left[-\frac{1}{2}x^2\right] \quad [3]$$

とおくと、

$$\left\{ \frac{d^2 F}{dx^2} - 2x \frac{dF}{dx} + (x^2 - 1)F \right\} \exp\left[-\frac{1}{2}x^2\right] + (m - x^2)F \exp\left[-\frac{1}{2}x^2\right] = 0$$
$$\left[\frac{d^2}{dx^2} - 2x \frac{d}{dx} + m - 1 \right] F = 0 \quad [4]$$

が得られる。

ここで、 $F(x)$ を多項式の形で、

$$F(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots \quad [5]$$

と表す。[5]を[4]に代入して、 x^k の項の係数に注目すると、

$$(k+1)(k+2)c_{k+2} + (-2k+m-1)c_k = 0$$
$$c_{k+2} = \frac{(2k-m+1)}{(k+1)(k+2)} c_k \quad [6]$$

となる。[6]より、

$$m = 2n+1 \quad (n \text{ は } 0 \text{ 以上の整数}) \quad [7]$$

であれば、 $c_n \neq 0$ であっても $c_{n+2} = c_{n+4} = c_{n+6} = \cdots = 0$ が成り立つ。ここで、 n が偶数である場合、 $c_1 = 0$ とすれば、 $c_3 = c_5 = c_7 = \cdots = 0$ となるので、結局、 $c_{n+1} = c_{n+2} = c_{n+3} = \cdots = 0$ が成り立つ。また、 n が奇数である場合、 $c_0 = 0$ とすれば、 $c_2 = c_4 = c_6 = \cdots = 0$ となるので、この場合も、 $c_{n+1} = c_{n+2} = c_{n+3} = \cdots = 0$ が成り立つ。つまり、[7]が成り立つとき、[4]を満たすような、項の数が有限の多項式 $F(x)$ が存在する。一般に、 0 以上の整数 n について、

$$x^n \exp\left[-\frac{1}{2}x^2\right] \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow \pm\infty) \quad [8]$$

だから、 $F(x)$ の項の数が有限であれば[3]は境界条件[2]を満たす。したがって、[7]が成り立てばよいといえる。[7]を[4]に代入し、 $F(x) = H_n(x)$ とすると、

$$\left[\frac{d^2}{dx^2} - 2x \frac{d}{dx} + 2n \right] H_n(x) = 0 \quad (n \text{ は } 0 \text{ 以上の整数}) \quad [9]$$

が得られる。これを**エルミートの微分方程式**(Hermite's differential equation)という。また、 $H_n(x)$ を n 次の**エルミート多項式**(Hermite polynomial)という。エルミート多項式を求めると、

$$\begin{aligned} H_0(x) &= 1 \\ H_1(x) &= 2x \\ H_2(x) &= 4x^2 - 2 \\ &\vdots \end{aligned}$$

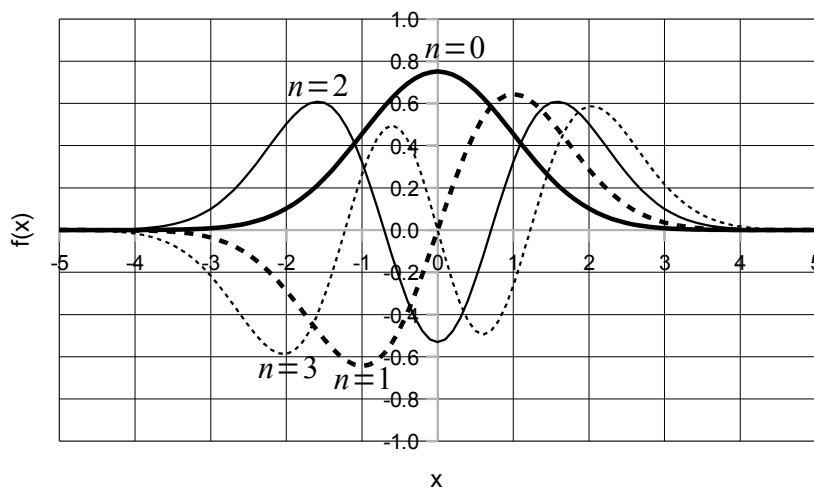
となる。一般には、

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} \quad [10]$$

と書ける。実際に、 $n=0$ のとき、[10]は[9]を満たす。また、 $n=k$ のとき、[10]が[9]を満たすと仮定すると、[9]の両辺を x で微分することによって、 $n=k+1$ のときも[10]が[9]を満たすことが示される。したがって、 $n \geq 0$ について、[10]は[9]を満たすことが証明される。このとき、 $f(x)$ は、

$$f_n(x) = H_n(x) \exp\left[-\frac{1}{2}x^2\right] \quad [11]$$

と表せる。 $f_n(x)$ を図示すると次のようになる。



$f_n(x)$ の関数形

$f_n(x)$ は、 n が偶数のとき $x=0$ について対称、奇数のとき反対称である。

参考文献：

- Gill, A. E., 1980: Some simple solutions for heat-induced tropical circulation. *Quart. J. Roy. Meteor. Soc.*, **106**, 447-462.
- Madden, R. A., and P. R. Julian, 1971: Detection of a 40-50 day oscillation in the zonal wind in the tropic Pacific. *J. Atmos. Sci.*, **28**, 702-708.
- Madden, R. A., and P. R. Julian, 1972: Description of global-scale circulation cells in the tropics with a 40-50 day period. *J. Atmos. Sci.*, **29**, 1109-1123.
- Matsuno, T., 1966: Quasi-geostrophic motions in the equatorial area. *J. Meteor. Soc. Japan*, **44**, 25-43.
- Wallace, J. M., and V. E. Kousky, 1968: Observational evidence of Kelvin waves in the tropical stratosphere. *J. Atmos. Sci.*, **25**, 900-907.
- Yanai, M., and T. Maruyama, 1966: Stratospheric wave disturbances propagating over the equatorial Pacific. *J. Meteor. Soc. Japan*, **44**, 291-294.