２　浅水方程式系

ここでは、熱帯域で、大きい空間スケールでの大気の運動を考える。熱帯域では、水平風場や気圧場は対流圏下層と上層で逆符号の偏差を示すことが多い。そこで、下層と上層で逆符号になる鉛直構造をあらかじめ仮定することによって、プリミティブ方程式系をより簡単にした方程式系の導出を試みる。

２．１　プリミティブ方程式系

プリミティブ方程式系(primitive equations)において、水平方向の運動方程式は、

$$\frac{D}{Dt}u = fv - \frac{\partial}{\partial x}\Phi \qquad [1]$$

$$\frac{D}{Dt}v = -fu - \frac{\partial}{\partial y}\Phi \qquad [2]$$

と書ける。ただし、u は東西風、v は南北風、Φ はジオポテンシャル、f はコリオリ係数である。連続の式は、

$$\frac{\partial}{\partial x}u + \frac{\partial}{\partial y}v + \frac{\partial}{\partial p}\omega = 0 \qquad [3]$$

と表される。ただし、p は気圧、ω は鉛直 p 速度である。また、静水圧平衡は、比容を α とおくと、

$$\frac{\partial}{\partial p}\Phi = -\alpha \qquad [4]$$

と書け、理想気体の状態方程式は、

$$p\alpha = RT \qquad [5]$$

である。ただし、T は気温、R は気体定数である。さらに、非断熱加熱がない場合には、熱力学方程式は、温位 θ を用いて、

$$\frac{D}{Dt}\theta = 0 \qquad [6]$$

と書ける。

２．２　微小振幅の仮定

ここで、静止場からの微小振幅を仮定することによって、6 変数のプリミティブ方程式系を 3 変数の方程式系に変形する。

まず、運動方程式[1]、[2]は、微小振幅を仮定することによって、

$$\frac{\partial}{\partial t}u = fv - \frac{\partial}{\partial x}\Phi \qquad [7]$$

$$\frac{\partial}{\partial t}v = -fu - \frac{\partial}{\partial y}\Phi \qquad [8]$$

と書ける。

次に、熱力学方程式[6]で、温位 θ を基本場 $\bar{\theta}$ とじょう乱場 θ' に分けると、

$$\frac{D}{Dt}\bar{\theta}+\frac{D}{Dt}\theta'=0$$

となる。温位の基本場 $\bar{\theta}$ は気圧 p のみに依存すると仮定すると、

$$\frac{D}{Dt}\theta'+\omega\frac{d\bar{\theta}}{dp}=0$$

と書ける。さらに、微小振幅を仮定しているので、

$$\frac{\partial}{\partial t}\theta'+\omega\frac{d\bar{\theta}}{dp}=0 \qquad [9]$$

と表せる。一方、[4]、[5]より、

$$\frac{\partial}{\partial p}\Phi=-\frac{RT}{p}$$

が成り立つが、温位 θ の定義より、

$$\frac{\partial}{\partial p}\Phi=-\frac{R}{p}\theta\left(\frac{p}{p_0}\right)^{R/C_p} \qquad [10]$$

と表せる。ただし、 C_p は定圧比熱である。[10]の両辺を t で微分すると、

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial p}\Phi=-\frac{R}{p}\left(\frac{p}{p_0}\right)^{R/C_p}\frac{\partial}{\partial t}\theta' \qquad [11]$$

が得られる。[9]を代入すると、

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial p}\Phi=\frac{R}{p}\left(\frac{p}{p_0}\right)^{R/C_p}\frac{d\bar{\theta}}{dp}\omega \qquad [12]$$

となる。ここで、

$$s=-\frac{R}{p}\left(\frac{p}{p_0}\right)^{R/C_p}\frac{d\bar{\theta}}{dp} \qquad [13]$$

とおくと、[12]は、

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial p}\Phi=-s\,\omega$$

となって、

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{s}\frac{\partial}{\partial p}\right)\Phi=-\omega \qquad [14]$$

と表せる。[14]の両辺を p で微分すると、

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{1}{s}\frac{\partial}{\partial p}\right)\right]\Phi=-\frac{\partial}{\partial p}\omega \qquad [15]$$

となる。[15]に[3]を代入すると、

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{1}{s}\frac{\partial}{\partial p}\right)\right]\Phi=\left(\frac{\partial}{\partial x}u+\frac{\partial}{\partial y}v\right) \qquad [16]$$

と表せる。

２．３　変数分離

方程式系[7]、[8]、[16]において、一定の鉛直構造を仮定することによって、水平、鉛直3次元の方程式系から、水平2次元の方程式系を導出する。

変数 u 、 v 、 Φ は鉛直方向に一定の構造を持っていると仮定して、

$$u=\hat{u}(x,y,t)P(p) \tag{17}$$

$$v=\hat{v}(x,y,t)P(p) \tag{18}$$

$$\Phi=\hat{\Phi}(x,y,t)P(p) \tag{19}$$

とおく。このような手法を**変数分離**(separation of variables)という。なお、方程式系[7]、[8]、[16]を満たす解は一般に[17]〜[19]のように表されるわけではなく、[17]〜[19]のように表される解の重ね合わせであると考える。

まず、運動方程式[7]と[8]に、[17]〜[19]を代入すると、

$$\frac{\partial}{\partial t}(\hat{u}P)=f\hat{v}P-\frac{\partial}{\partial x}(\hat{\Phi}P)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\hat{v}P)=-f\hat{u}P-\frac{\partial}{\partial y}(\hat{\Phi}P)$$

となって、

$$\frac{\partial}{\partial t}\hat{u}=f\hat{v}-\frac{\partial}{\partial x}\hat{\Phi} \tag{20}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\hat{v}=-f\hat{u}-\frac{\partial}{\partial y}\hat{\Phi} \tag{21}$$

が得られる。

次に、[16]に、[17]〜[19]を代入すると、

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\partial}{\partial p}\left(\frac{1}{s}\frac{\partial}{\partial p}\right)\right](\hat{\Phi}P)=\left[\frac{\partial}{\partial x}(\hat{u}P)+\frac{\partial}{\partial y}(\hat{v}P)\right]$$

となって、

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\hat{\Phi}\right)\left[\frac{d}{dp}\left(\frac{1}{s}\frac{d}{dp}\right)\right]P=\left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{u}+\frac{\partial}{\partial y}\hat{v}\right)P \tag{22}$$

が得られる。さらに、両辺を $\left(\frac{\partial}{\partial t}\hat{\Phi}\right)P$ で割ると、

$$\frac{\left[\frac{d}{dp}\left(\frac{1}{s}\frac{d}{dp}\right)\right]P}{P}=\frac{\left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{u}+\frac{\partial}{\partial y}\hat{v}\right)}{\left(\frac{\partial}{\partial t}\hat{\Phi}\right)} \tag{23}$$

となる。ここで、左辺は p のみの関数だから、 x 、 y 、 t には依存しない。一方、右辺は x 、 y 、 t のみの関数だから、 p には依存しない。つまり、[23]の両辺は x 、 y 、 p 、 t のいずれにも依存しない定数である。そこで、

$$\frac{\left[\frac{d}{dp}\left(\frac{1}{s}\frac{d}{dp}\right)\right]P}{P}=\frac{\left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{u}+\frac{\partial}{\partial y}\hat{v}\right)}{\left(\frac{\partial}{\partial t}\hat{\Phi}\right)}=\lambda$$

とおけば、

$$\left[\frac{d}{dp}\left(\frac{1}{s}\frac{d}{dp}\right)\right]P=\lambda P \qquad [24]$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\hat{\Phi}=\frac{1}{\lambda}\left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{u}+\frac{\partial}{\partial y}\hat{v}\right) \qquad [25]$$

が得られる。

２．４　解の鉛直構造

[24]は方程式系の解の鉛直構造を決定する方程式であり、 p の関数 P に演算子 $\left[\frac{d}{dp}\left(\frac{1}{s}\frac{d}{dp}\right)\right]$ を作用させると定数倍になることを示している。つまり、方程式[24]を解くことは、演算子 $\left[\frac{d}{dp}\left(\frac{1}{s}\frac{d}{dp}\right)\right]$ の**固有値**(eigenvalue) λ と**固有関数**(eigenfunction) P を求めることにほかならない。[24]を実際の気象場に適用するときには、関数 P は、各気圧面における関数の値を列挙したベクトルとして表され、そのとき、演算子は行列で表現される。したがって、[24]の解を求めることは、行列の固有値、**固有ベクトル**(eigenvector)を求めることに置き換えられる。なお、境界条件として、領域の上端と下端で $\omega=0$ とすれば、[14]より、

$$\frac{d}{dp}P=0 \qquad [26]$$

が得られる。

２．５　浅水方程式系

[20]、[21]、[25]は、$\hat{u}$、$\hat{v}$、$\hat{\Phi}$ についての連立偏微分方程式である。ここで、あらためて、$\hat{u}$、$\hat{v}$、$\hat{\Phi}$ をそれぞれ、u、v、Φ と書くことにすると、

$$\frac{\partial}{\partial t}u=fv-\frac{\partial}{\partial x}\Phi \qquad [27]$$

$$\frac{\partial}{\partial t}v=-fu-\frac{\partial}{\partial y}\Phi \qquad [28]$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\Phi=\frac{1}{\lambda}\left(\frac{\partial}{\partial x}u+\frac{\partial}{\partial y}v\right) \qquad [29]$$

が得られる。[27]～[29]は、浅水波の挙動を表す方程式系と同一であり、**浅水方程式系**(shallow-water equations)とよばれる。浅水波と対応させるため、[29]は通常、

$$\frac{\partial}{\partial t}\Phi=-gH\left(\frac{\partial}{\partial x}u+\frac{\partial}{\partial y}v\right) \qquad [30]$$

と書かれる。ただし、gは重力加速度である。また、Hは長さの次元を持ち、浅水波の場合であれば水深に対応する。今回のように、プリミティブ方程式系を変数分離することによって得られた方程式系においては、Hは**等価深度**(equivalent depth)とよばれる。水平風場や気圧場が下層と上層で逆符号の偏差を示すような第1傾圧モードの場合、等価深度の値は100〜250 m程度の値になることが多い。熱帯の大気に適用すると、下層での収束に伴って積雲対流による非断熱加熱が生じるので、等価深度の値が変化し、80 m程度になっている。

問2.1　$p=500$ hPaで、$\dfrac{d\bar{\theta}}{dp}=-0.5\times10^{-1}$ K/hPaとしたとき、[13]を用いて s の値を求めよ。気体定数は$R=287$ J/kg Kであり、また、$p=1000$ hPa、$R/C_p=2/7$とする。次に、150 hPaから925 hPaまでの範囲で s の値が一定であると仮定したとき、この範囲で[24]の固有値 λ を求めることによって、第1傾圧モード（ λ の絶対値が最小のモード）の等価深度と位相速度を求め、有効数字2けたで答えよ。境界条件としては[26]を用いよ。重力加速度は$g=9.81$ m/s^{2}とする。

補遺　浅水波

水深 H が一定の海洋での波動を考える。波長に比べて水深がじゅうぶんに浅く、水平流速 (u,v) は深さによらないと仮定する。圧力偏差を p とすると、水平方向の運動方程式は、

$$\frac{D}{Dt}u = fv - \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x}p \qquad [1]$$

$$\frac{D}{Dt}v = -fu - \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial y}p \qquad [2]$$

と書ける。ただし、 f はコリオリ係数である。また、海水の密度 ρ は一定とする。運動量の移流の効果を無視すれば、

$$\frac{\partial}{\partial t}u = fv - \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial x}p \qquad [3]$$

$$\frac{\partial}{\partial t}v = -fu - \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial y}p \qquad [4]$$

と表せる。一方、水深の偏差 h の時間変化は、

$$\frac{\partial}{\partial t}h = -\left[\frac{\partial}{\partial x}\left\{(H+h)u\right\} + \frac{\partial}{\partial y}\left\{(H+h)v\right\}\right] \qquad [5]$$

と書ける。水深の偏差 h は基本場の水深 H よりも十分に小さいと仮定すると、

$$\frac{\partial}{\partial t}h = -H\left(\frac{\partial}{\partial x}u + \frac{\partial}{\partial y}v\right) \qquad [6]$$

と表せる。 h に関係なく水面での圧力は一定とし、さらに静水圧平衡を仮定すると、

$$p = \rho g h \qquad [7]$$

が成り立つ。ただし、 g は重力加速度である。[7]を[3]、[4]に代入すると、

$$\frac{\partial}{\partial t}u = fv - g\frac{\partial}{\partial x}h \qquad [8]$$

$$\frac{\partial}{\partial t}v = -fu - g\frac{\partial}{\partial y}h \qquad [9]$$

が得られる。また、 $\Phi = gh$ とすれば、[8]、[9]、[6]は、

$$\frac{\partial}{\partial t}u = fv - \frac{\partial}{\partial x}\Phi \qquad [10]$$

$$\frac{\partial}{\partial t}v = -fu - \frac{\partial}{\partial y}\Phi \qquad [11]$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\Phi = -gH\left(\frac{\partial}{\partial x}u + \frac{\partial}{\partial y}v\right) \qquad [12]$$

と書くこともできる。方程式系[8]、[9]、[6]、または方程式系[10]、[11]、[12]を**浅水方程式系**(shallow-water equations)とよぶ。

浅水方程式系[10]〜[12]で、コリオリ力を無視し、さらに南北方向（ y 方向）の運動を無視して東西方向（ x 方向）の運動だけを考えると、

$$\frac{\partial}{\partial t}u=-\frac{\partial}{\partial x}\Phi \qquad [13]$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\Phi=-gH\frac{\partial}{\partial x}u \qquad [14]$$

となる。[13]を t で、[14]を x で偏微分して、 Φ を消去すると、

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}u=gH\frac{\partial^2}{\partial x^2}u \qquad [15]$$

が得られる。ここで、東西、時間方向には波型を仮定して、

$$u=\hat{u}\exp[i(kx-\omega t)] \qquad [16]$$

とおく。ただし、 $\omega>0$ とする。このとき、[15]は

$$-\omega^2\hat{u}=-gHk^2\hat{u} \qquad [17]$$

となるから、

$$\omega=\sqrt{gH}|k| \qquad [18]$$

が得られる。これが浅水方程式系における波動の分散関係式である。位相速度 c は、

$$c=\frac{\omega}{k}=\pm\sqrt{gH} \qquad [19]$$

であり、波数 k によらず、波動は一定の速さ $\sqrt{gH}$ で進行することがわかる。このような浅水方程式系の解として得られる波動を**浅水波**(shallow-water wave)という。**津波**(tsunami)はしばしば典型的な浅水波とみなされる。 $g=9.8$ m/s^2、 $H=4000$ m のとき、位相速度 c は $c=200$ m/s である。水深が浅くなると位相速度は遅くなる。