８　定常ロスビー波（２）

８．１　光線理論

定常ロスビー波の波束（エネルギー）の伝播経路を考えよう。定常ロスビー波の位相は時間変化しないので、角振動数ωはゼロである。したがって、波動の特性を決める変数は東西波数kと南北波数lの２つである。第7章の[12]によってkとlが満たすべき条件がひとつ与えられるが、これだけでは、kとlの値の両方を決定することはできない。そこで、定常ロスビー波の波束の伝播にともなって、東西波数kと南北波数lが、第7章の[12]を満たしながらどう変化していくか検討する。

基本場の状態を表す変数である$\hat{\beta}$とUは、一般に、南北方向には変化するが東西方向にはあまり変化しない。そこで、以下では、$\hat{\beta}$とUが東西方向には一様であると仮定する。波束の伝播に乗って観測した場合の”ラグランジュ微分”は、

$$\frac{D_g}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + c_{gx}\frac{\partial}{\partial x} + c_{gy}\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial \omega}{\partial k}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial \omega}{\partial l}\frac{\partial}{\partial y} \qquad [17]$$

と書ける。したがって、波束の伝播に乗って観測した東西波数kの時間変化は

$$\frac{D_g}{Dt}k = \frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial \omega}{\partial k}\frac{\partial k}{\partial x} + \frac{\partial \omega}{\partial l}\frac{\partial k}{\partial y} \qquad [18]$$

である。波の位相をθとしたとき、角振動数や波数の定義から、

$$\omega = -\frac{\partial \theta}{\partial t}$$

$$k = \frac{\partial \theta}{\partial x}$$

であることに注意すると、

$$\frac{\partial k}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \theta}{\partial t} = -\frac{\partial \omega}{\partial x} \qquad [19]$$

$$\frac{\partial k}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\partial l}{\partial x} \qquad [20]$$

である。これらを[18]に代入すると、

$$\frac{D_g}{Dt}k = -\frac{\partial \omega}{\partial x} + \frac{\partial \omega}{\partial k}\frac{\partial k}{\partial x} + \frac{\partial \omega}{\partial l}\frac{\partial l}{\partial x}$$

が得られる。$\omega = \omega\left(\hat{\beta}, U, k, l\right)$であることに注意して、偏微分において固定する変数を明示的に書けば、

$$\frac{D_g}{Dt}k = -\frac{\partial \omega}{\partial x} + \left(\frac{\partial \omega}{\partial k}\right)_{\hat{\beta},U,l}\frac{\partial k}{\partial x} + \left(\frac{\partial \omega}{\partial l}\right)_{\hat{\beta},U,k}\frac{\partial l}{\partial x} \qquad [21]$$

となる。ここで、ωは$\hat{\beta}$、U、k、lの関数だから、一般に

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} = \left(\frac{\partial \omega}{\partial \hat{\beta}}\right)_{U,k,l}\frac{\partial \hat{\beta}}{\partial x} + \left(\frac{\partial \omega}{\partial U}\right)_{\hat{\beta},k,l}\frac{\partial U}{\partial x} + \left(\frac{\partial \omega}{\partial k}\right)_{\hat{\beta},U,l}\frac{\partial k}{\partial x} + \left(\frac{\partial \omega}{\partial l}\right)_{\hat{\beta},U,k}\frac{\partial l}{\partial x} \qquad [22]$$

と書ける。[22]を[21]に代入すると、

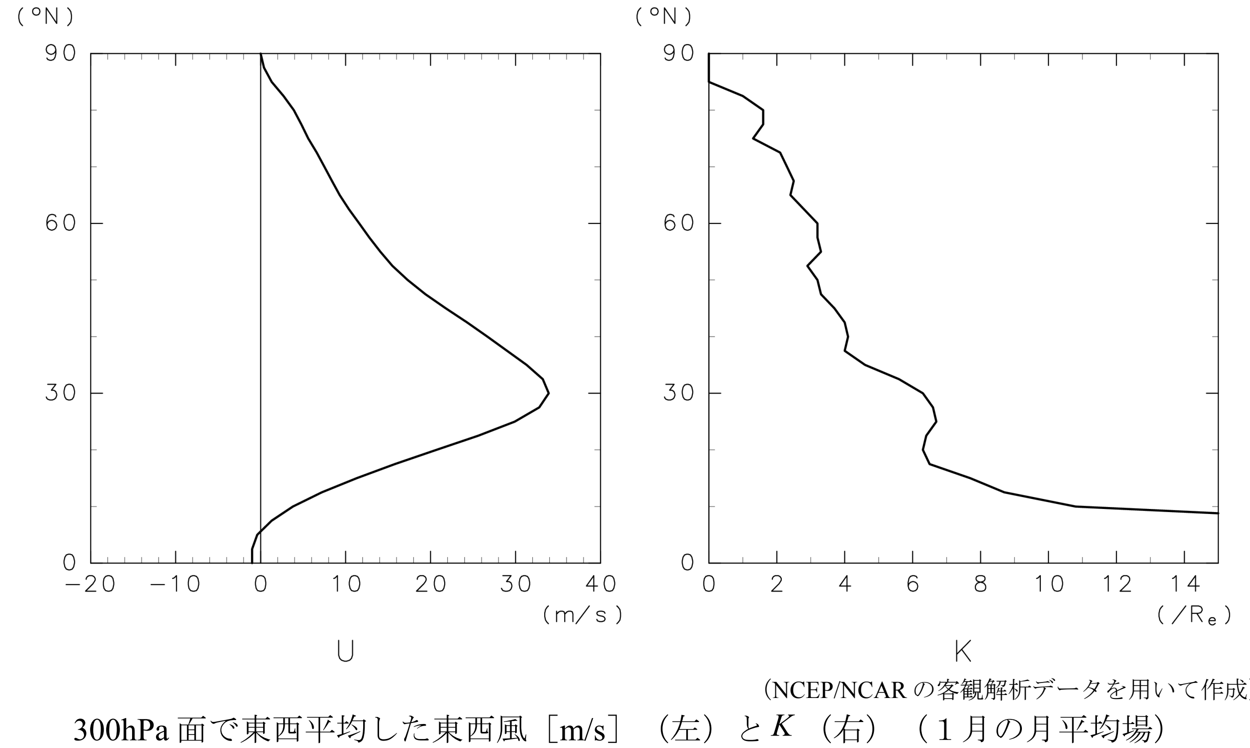
$$\frac{D_g}{Dt}k = -\left(\frac{\partial\omega}{\partial\hat{\beta}}\right)_{U,k,l}\frac{\partial\hat{\beta}}{\partial x} - \left(\frac{\partial\omega}{\partial U}\right)_{\hat{\beta},k,l}\frac{\partial U}{\partial x} \qquad [23]$$

が得られる。したがって、U と $\hat{\beta}$ が東西方向には一様であれば、

$$\frac{D_g}{Dt}k = 0 \qquad [24]$$

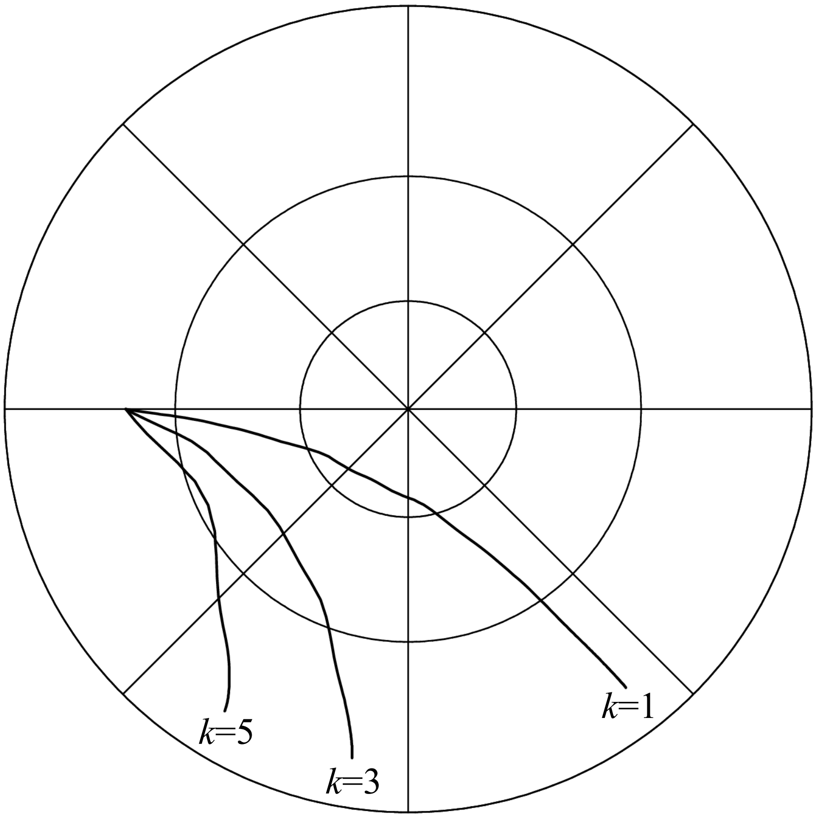
が成り立つ。つまり、基本場が東西方向に一様であれば、東西波数 k は波束の伝播に沿って一定である。

U と $\hat{\beta}$ は y に依存するので、定常ロスビー波の波束が南北方向に伝播すれば、[12]より、定常ロスビー波の全波数 $K = \sqrt{k^2 + l^2}$ は変化する（下の図を参照）。一方で、[24]より、東西波数 k は変化しないので、結局、全波数 K が変化したら、南北波数 l を変化させるしかない。全波数 K が東西波数 k よりも大きければ、l が実数解を持ち、波束として伝播することができる。しかし、下の図に示すように、波束が高緯度に伝播すると、全波数 K は徐々に小さくなるので、南北波数 l の値も小さくなる。やがて、全波数 K が東西波数 k よりも小さくなると、l が実数解を持たなくなる。この場合、波束は反射され、それよりも高緯度には伝播できない。反射された波束は低緯度に向かって伝わり、東風領域にぶつかって $k \to +\infty$ になるまで伝播する（次のページの図を参照）。



（NCEP/NCAR の客観解析データを用いて作成）

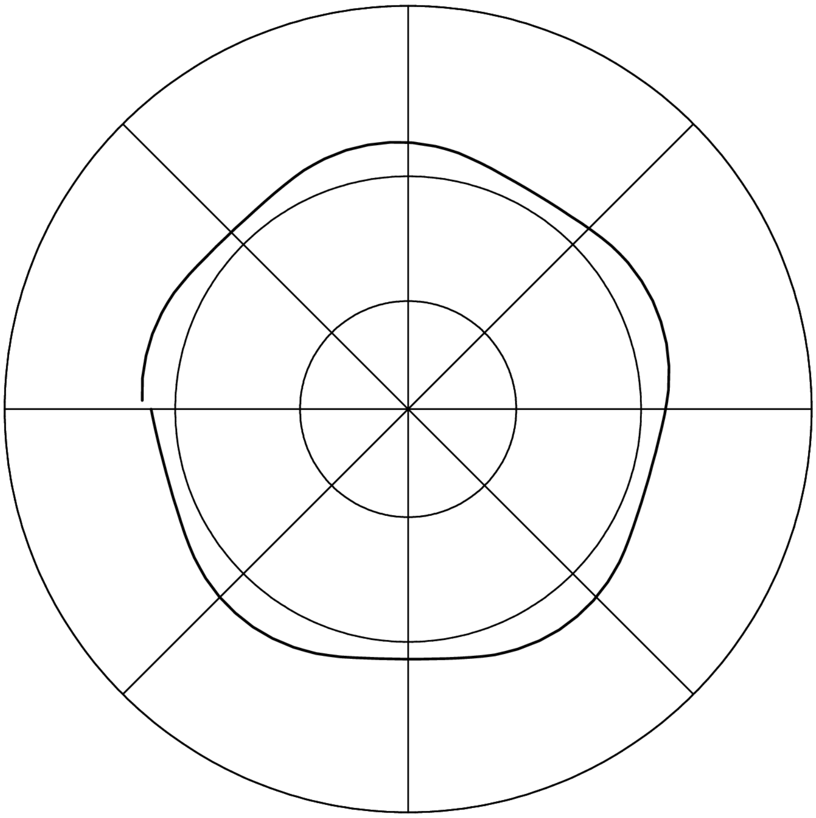
300hPa 面で東西平均した東西風［m/s］（左）と K（右）（１月の月平均場）



（NCEP/NCAR の客観解析データを用いて作成）

300hPa 面で東西平均した東西風に対して計算した定常ロスビー波束の伝播経路
東西波数 k が１、３、５の場合について、北緯 20°から射出した場合の結果を示す。

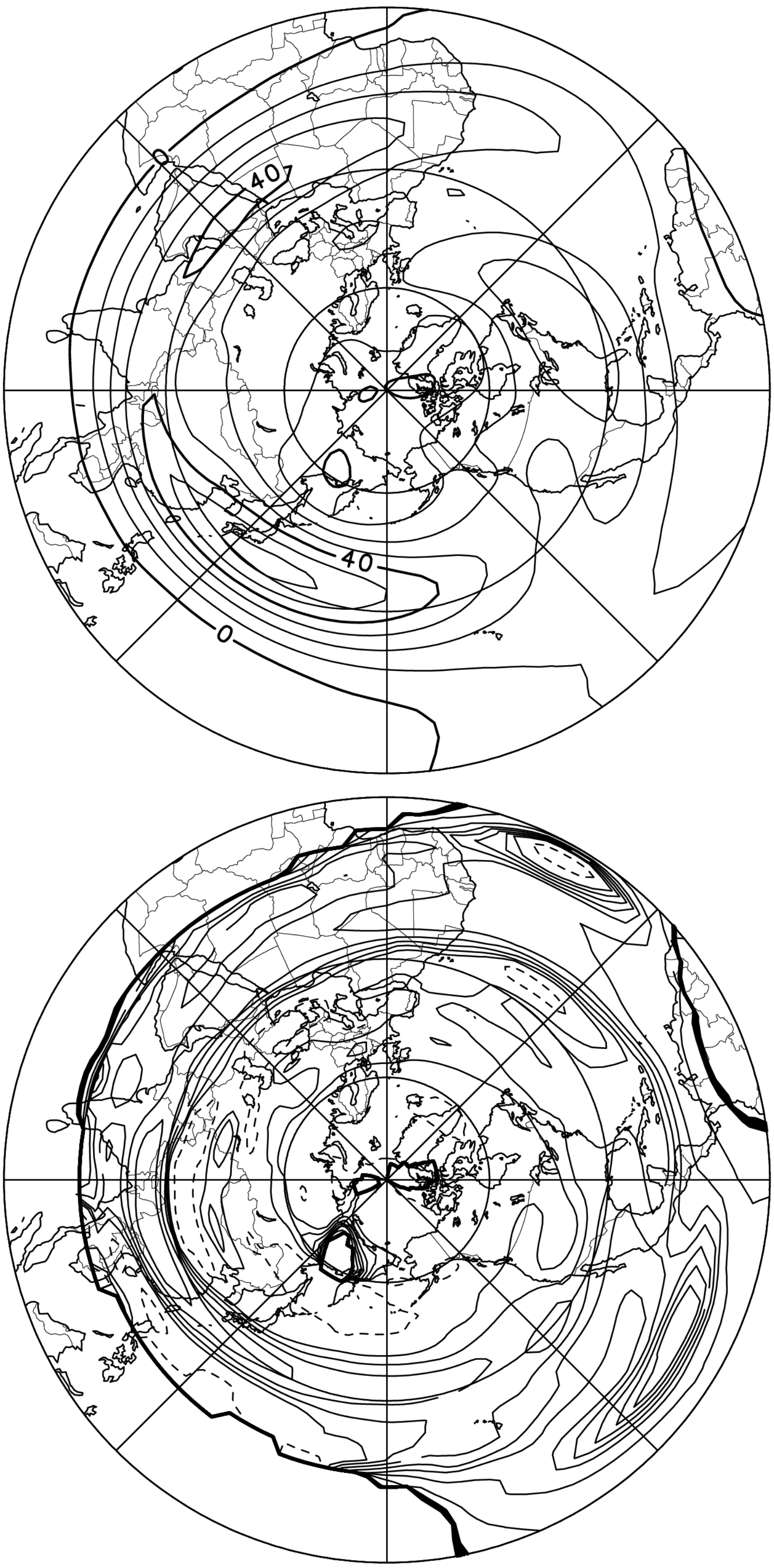
南北方向に比較的狭い領域で東西風Uが大きいと、U_{yy}が絶対値の大きい負の値を持つので、$\hat{\beta}$が大きくなり、Kも大きな値を持つ。南北方向に狭い領域で全波数Kの値が大きいと、与えられた東西波数kの値によっては、その狭い領域だけで定常ロスビー波束としての伝播が可能となる。このような領域を**導波管**(waveguide)とよぶことがある。たとえば、前出の東西風とKのグラフにおいては、北緯25〜30°付近にKの値の極大が見られ、導波管が形成されていることがわかる。



（NCEP/NCARの客観解析データを用いて作成）

300hPa面で東西平均した東西風に対して計算した定常ロスビー波束の伝播経路
東西波数kが6.6の場合について、北緯25°から射出した場合の結果を示す。

ここまでは東西平均場を解析してきたが、実際には東西風の分布は経度によって変化する。各地点ごとに東西風とを計算した結果を次の図に示す。冬季の日本付近では特に偏西風が強く、顕著な導波管が形成されていることがわかる。



（NCEP/NCAR の客観解析データを用いて作成）

300hPa 面での東西風［m/s］（上）と K（下）（１月の月平均場）
K はその緯度での緯度円の半径で規格化、0 を点線、4、5、6、7、8、10、15 を実線で表示、東風領域との境界は太線。

[1]球面座標系においては、

$$\hat{\beta} = \beta - \frac{1}{a^2}\frac{\partial}{\partial\phi}\left(\frac{1}{\cos\phi}\frac{\partial}{\partial\phi}\right)(U\cos\phi)$$

となる。ただし、a は地球半径、ϕ は緯度である。右辺第２項は基本場の相対渦度の南北微分である。やや複雑であるが、球面座標上の微小領域での相対渦度をストークスの定理によって定義することを考えると理解しやすい。このように定義した $\hat{\beta}$ を用いて、定常ロスビー波の全波数を以下のように書くことができる。

$$K = \sqrt{\frac{\hat{\beta}}{U}}(r\cos\phi)$$

波数は１メートルを基準とするより、その緯度での緯度線の半径 $r\cos\phi$ を基準としたほうが扱いやすいので、ここでは、$r\cos\phi$ をかけている。

８．２　波活動度フラックス

定常ロスビー波は、位相は動かないが、エネルギーは伝播している。したがって、定常ロスビー波のエネルギーの伝播の定量的な評価は重要である。しかし、定常ロスビー波に関して、波動のエネルギーを適切に定義することは困難である。なぜなら、ロスビー波の節の部分には運動エネルギーが存在するが、腹の部分ではエネルギーに相当する物理量を定義することが難しいからである。そこで、エネルギーに相当する物理量の流れ（フラックス）として、次の条件を満たすベクトル量を新たに定義することにする。

１．群速度ベクトルに平行である。
２．大きさは、波動の振幅の２乗に比例する。
３．位相依存性がない。つまり、波動の節の部分と腹の部分を通して滑らかに定義できる。

これらの条件を満たすフラックス $\vec{F} = (F_x, F_y)$ として、

$$F_x = \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2 - \psi\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\right\} \qquad [25]$$

$$F_y = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial y} - \psi\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y}\right) \qquad [26]$$

を考えることができる[2,3]。実際に、平面波 $\psi = \hat{\psi}\exp[i(kx + ly - \omega t)]$ に対して、

$$F_x = \frac{1}{2}k^2|\hat{\psi}|^2$$

$$F_y = \frac{1}{2}kl|\hat{\psi}|^2$$

であり、上の３つの条件を満たしている。[25]、[26]で定義されるベクトル量を**波活動度フラックス**(wave activity flux)という。傾圧不安定波のような移動性じょう乱よりも長い時間スケールの変動を考えるときには、波活動度フラックスを用いて定常ロスビー波の伝播を評価することがある。

[25]、[26]は、基本場が東西一様で東西風Uのみが吹いている状況での波活動度フラックスである。基本場が東西非一様で、南北風Vも存在する場合には、[25]、[26]を拡張して、

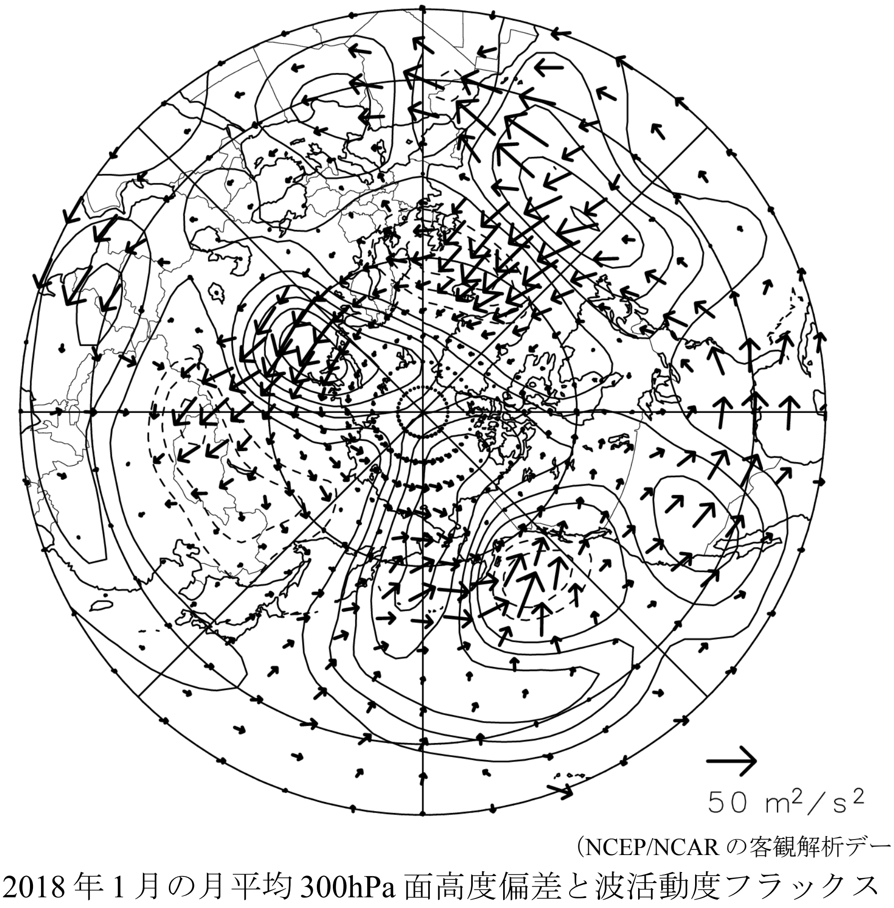
$$F_x = \frac{1}{2|\vec{U}|}\left[U\left\{\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2 - \psi\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\right\} + V\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial y} - \psi\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y}\right)\right] \quad [27]$$

$$F_y = \frac{1}{2|\vec{U}|}\left[U\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial y} - \psi\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y}\right) + V\left\{\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2 - \psi\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\right\}\right] \quad [28]$$

とする。ただし、$|\vec{U}| = \sqrt{U^2 + V^2}$である。

実際に波活動度フラックスを計算するときには、基本場を定義する必要がある。もっとも単純には、気候平均場の東西風をさらに東西平均した場を基本場とし、そこからの偏差をじょう乱場とすることが考えられる。この場合は、[25]、[26]を用いればよい。気候変動を考えるときには、（東西非一様性を含む）気候平均場の風を基本場とし、そこからの偏差をじょう乱場と定義することが多い。この場合は、[27]、[28]を用いる。

波活動度フラックスは、厳密には準地衡方程式系において定義されている。したがって、水平面とは等圧面のことであり、また、基本場の風としては、実際の平均風そのものではなく、非発散の地衡風を用いるのが正確である。



（NCEP/NCAR の客観解析データを用いて作成）

2018 年 1 月の月平均 300hPa 面高度偏差と波活動度フラックス

等高度線は 30 m おき、負の等高度線は点線、ゼロの等高度線は省略。基本場は

1981～2010 年の平均場。

[2]球面座標系においては、

$$F_x = \frac{\cos\phi}{2|\vec{U}|}\left[\frac{U}{a^2\cos^2\phi}\left\{\left(\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}\right)^2 - \psi\frac{\partial^2\psi}{\partial\lambda^2}\right\} + \frac{V}{a^2\cos\phi}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}\frac{\partial\psi}{\partial\phi} - \psi\frac{\partial^2\psi}{\partial\lambda\partial\phi}\right)\right]$$

$$F_y = \frac{\cos\phi}{2|\vec{U}|}\left[\frac{U}{a^2\cos\phi}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}\frac{\partial\psi}{\partial\phi} - \psi\frac{\partial^2\psi}{\partial\lambda\partial\phi}\right) + \frac{V}{a^2}\left\{\left(\frac{\partial\psi}{\partial\phi}\right)^2 - \psi\frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2}\right\}\right]$$

となる。ただし、a は地球半径、ϕ は緯度である。緯度方向のスケールの整合性のため、$\cos\phi$ をかけている。

[3]３次元に拡張して考えることもできる。その場合、$\vec{F} = (F_x, F_y, F_z)$ は

$$F_x = \frac{p}{2}\left\{\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2 - \psi\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\right\}$$

$$F_y = \frac{p}{2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial y} - \psi\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y}\right)$$

$$F_z = \frac{p}{2}\left\{\frac{f_0^2}{N^2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial z} - \psi\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial z}\right)\right\}$$

となる。ただし、f_0 は基準緯度におけるコリオリ係数、N はブラント・ヴァイサラ振動数である。３次元で取り扱うときには、鉛直方向のスケールの整合性のため、気圧 p をかける。２次元（等圧面上）で示すときには p をかけないで示すことが多い。

補遺　波活動度フラックスの導出

渦度方程式は

$$\frac{D}{Dt}\xi=-\hat{\beta}\psi_x+s \qquad [1]$$

と書ける。基本場においては東西一様な東西風のみが吹いているものとする。さらに微小振幅を仮定しているので、

$$\frac{D}{Dt}=\frac{\partial}{\partial t}+U\frac{\partial}{\partial x}$$

である。 s は外部強制による渦度の生成、消滅を表す。両辺に ξ をかけると、

$$\xi\frac{D}{Dt}\xi=-\hat{\beta}\xi\psi_x+s\xi$$

$$\frac{D}{Dt}\left(\frac{\xi^2}{2}\right)=-\hat{\beta}\xi\psi_x+s\xi \qquad [2]$$

となる。両辺を $\hat{\beta}$ で割ると、

$$\frac{D}{Dt}\left(\frac{\xi^2}{2\hat{\beta}}\right)=-\psi_x\xi+\frac{s\xi}{\hat{\beta}} \qquad [3]$$

微小振幅においては、 $\frac{D}{Dt}=\frac{\partial}{\partial t}+U\frac{\partial}{\partial x}$ だから、

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\xi^2}{2\hat{\beta}}\right)=-\psi_x\xi-\frac{U}{2\hat{\beta}}\left(\xi^2\right)_x+\frac{s\xi}{\hat{\beta}} \qquad [4]$$

が得られる。[4]の左辺は、定常ロスビー波の振幅やエネルギーに関連した量である $\frac{\xi^2}{2\hat{\beta}}$ の時間変化を表しているので、[4]の右辺は定常ロスビー波のエネルギーの伝播の様子を表していると考えられる。以下では、[4]の右辺を基本場の東西風 U を使わないで表現することを試みる。

ここでは、定常ロスビー波を仮定しているので、[1]で時間微分をゼロとして、

$$U\frac{\partial}{\partial x}\xi=-\hat{\beta}\psi_x+s \qquad [5]$$

と書く。 $s=\frac{\partial}{\partial x}r$ と定義すれば、

$$\frac{\partial}{\partial x}(U\xi)=\frac{\partial}{\partial x}\left(-\hat{\beta}\psi+r\right)$$

となる。 x について積分すれば、

$$U\xi=-\hat{\beta}\psi+r+C \quad (C\text{は積分定数})$$

となるが、両辺とも偏差量であり、東西平均はゼロになるから、

$$U\xi=-\hat{\beta}\psi+r \qquad [6]$$

と表せる。[6]で外部強制 r がゼロであると仮定すれば、 $U\xi=-\hat{\beta}\psi$ となり、渦度と流線

関数との関係を示していることがわかる。[6]を[4]に代入して U を消去すると、

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\xi^2}{2\hat{\beta}}\right)=-\psi_x\xi-\frac{1}{2\hat{\beta}}\left\{\left(-\hat{\beta}\psi+r\right)\xi\right\}_x+\frac{s\xi}{\hat{\beta}}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\xi^2}{2\hat{\beta}}\right)=-\psi_x\xi+\frac{1}{2}(\psi\xi)_x-\frac{1}{2\hat{\beta}}(r\xi)_x+\frac{s\xi}{\hat{\beta}} \qquad [7]$$

が得られる。 $\xi=\psi_{xx}+\psi_{yy}$ を代入して、

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\xi^2}{2\hat{\beta}}\right)=-\psi_x\left(\psi_{xx}+\psi_{yy}\right)+\frac{1}{2}\left\{\psi\left(\psi_{xx}+\psi_{yy}\right)\right\}_x-\frac{1}{2\hat{\beta}}(r\xi)_x+\frac{s\xi}{\hat{\beta}}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\xi^2}{2\hat{\beta}}\right)=-\psi_x\psi_{xx}+\frac{1}{2}\left(\psi\psi_{xx}\right)_x-\psi_x\psi_{yy}+\frac{1}{2}\left(\psi\psi_{yy}\right)_x-\frac{1}{2\hat{\beta}}(r\xi)_x+\frac{s\xi}{\hat{\beta}}$$

となる。ここで、

$$\psi_x\psi_{xx}=\frac{1}{2}\left(\psi_x\psi_x\right)_x$$

を用いると、

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\xi^2}{2\hat{\beta}}\right)=-\frac{1}{2}\left(\psi_x\psi_x\right)_x+\frac{1}{2}\left(\psi\psi_{xx}\right)_x-\psi_x\psi_{yy}+\frac{1}{2}\left(\psi\psi_{yy}\right)_x-\frac{1}{2\hat{\beta}}(r\xi)_x+\frac{s\xi}{\hat{\beta}}$$

となって、

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\xi^2}{2\hat{\beta}}\right)=-\frac{1}{2}\left(\psi_x\psi_x\right)_x+\frac{1}{2}\left(\psi\psi_{xx}\right)_x-\frac{1}{2}\psi_x\psi_{yy}+\frac{1}{2}\psi\psi_{xyy}-\frac{1}{2\hat{\beta}}(r\xi)_x+\frac{s\xi}{\hat{\beta}}$$

が得られる。さらに、

$$\psi_x\psi_{yy}=\left(\psi_x\psi_y\right)_y-\psi_{xy}\psi_y$$

$$\psi\psi_{xyy}=\left(\psi\psi_{xy}\right)_y-\psi_{xy}\psi_y$$

を用いると、

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\xi^2}{2\hat{\beta}}\right)=-\frac{1}{2}\left(\psi_x\psi_x\right)_x+\frac{1}{2}\left(\psi\psi_{xx}\right)_x-\frac{1}{2}\left(\psi_x\psi_y\right)_y+\frac{1}{2}\psi_{xy}\psi_y+\frac{1}{2}\left(\psi\psi_{xy}\right)_y-\frac{1}{2}\psi_{xy}\psi_y$$
$$-\frac{1}{2\hat{\beta}}(r\xi)_x+\frac{s\xi}{\hat{\beta}}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\xi^2}{2\hat{\beta}}\right)=-\frac{1}{2}\left(\psi_x\psi_x\right)_x+\frac{1}{2}\left(\psi\psi_{xx}\right)_x-\frac{1}{2}\left(\psi_x\psi_y\right)_y+\frac{1}{2}\left(\psi\psi_{xy}\right)_y-\frac{1}{2\hat{\beta}}(r\xi)_x+\frac{s\xi}{\hat{\beta}} \qquad [8]$$

が得られる。[8]においては、外部強制を除くと、 $\frac{\xi^2}{2\hat{\beta}}$ の時間変化が ψ のみによって表されている。

ここで、波活動度フラックス $\vec{F}=\left(F_x,F_y\right)$ を

$$F_x=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2-\psi\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\right\} \qquad [9]$$

$$F_y = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\frac{\partial \psi}{\partial y} - \psi \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right) \qquad [10]$$

と定義すると、[8]は

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\xi^2}{2\hat{\beta}} \right) = -\nabla_p \cdot \vec{F} - \frac{1}{2\hat{\beta}}(r\,\xi)_x + \frac{s\,\xi}{\hat{\beta}} \qquad [11]$$

と表せる。