

6 第2種条件つき不安定(2)

6.1 不安定の条件

ここで、[27]に不安定モードが存在するための条件を考える。

$$u_3 = \hat{u}_3 \exp(\sigma t)$$

とおいて、[27]に代入すると、

$$\{K(\eta-1)-\sigma\} \frac{d}{dr} \left\{ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r \hat{u}_3) \right\} + \left(\frac{K}{2} + \sigma \right) \hat{u}_3 = 0 \quad [28]$$

が得られる。 η を定数として、[28]の両辺に $r \hat{u}_3^*$ をかけ、 $r=0$ から $r=\infty$ まで積分すると、

$$\{K(\eta-1)-\sigma\} \int_0^\infty (r \hat{u}_3^*) \frac{d}{dr} \left\{ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r \hat{u}_3) \right\} dr + \left(\frac{K}{2} + \sigma \right) \int_0^\infty r \hat{u}_3^* \hat{u}_3 dr = 0 \quad [29]$$

となる。ここで、

$$\int_0^\infty r \hat{u}_3^* \hat{u}_3 dr = \int_0^\infty |\hat{u}_3|^2 r dr \quad [30]$$

である。また、部分積分の公式より、

$$\int_0^\infty (r \hat{u}_3^*) \frac{d}{dr} \left\{ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r \hat{u}_3) \right\} dr = \left[(r \hat{u}_3^*) \left\{ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r \hat{u}_3) \right\} \right]_0^\infty - \int_0^\infty \frac{d}{dr} (r \hat{u}_3^*) \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r \hat{u}_3) dr$$

であるが、 $r=0$ で $\hat{u}_3=0$ 、 $r \rightarrow \infty$ で $\hat{u}_3 \rightarrow 0$ だから、右辺の第1項はゼロになり、

$$\begin{aligned} \int_0^\infty (r \hat{u}_3^*) \frac{d}{dr} \left\{ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r \hat{u}_3) \right\} dr &= - \int_0^\infty \frac{d}{dr} (r \hat{u}_3^*) \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r \hat{u}_3) dr \\ &= - \int_0^\infty \left| \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r \hat{u}_3) \right|^2 r dr \end{aligned} \quad [31]$$

が成り立つ。したがって、[29]は、

$$- \{K(\eta-1)-\sigma\} \int_0^\infty \left| \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r \hat{u}_3) \right|^2 r dr + \left(\frac{K}{2} + \sigma \right) \int_0^\infty |\hat{u}_3|^2 r dr = 0 \quad [32]$$

と変形できる。ここで

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^\infty \left| \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r \hat{u}_3) \right|^2 r dr \\ I_2 &= \int_0^\infty |\hat{u}_3|^2 r dr \end{aligned}$$

とおくと、 $I_1 > 0$ 、 $I_2 > 0$ である。これらを[32]に代入すると、

$$\{K(\eta-1)-\sigma\} I_1 = \left(\frac{K}{2} + \sigma \right) I_2 \quad [33]$$

が得られる。ここで、両辺の実部に注目すると、

$$\{K(\eta-1)-\sigma_r\} I_1 = \left(\frac{K}{2} + \sigma_r \right) I_2 \quad [34]$$

が成り立つ。ただし、 σ_r は σ の実部である。ここでは時間とともに成長する不安定モードを考えているので $\sigma_r > 0$ である。 I_1 、 I_2 はともに正だから、右辺は正である。定数 η が $\eta \leq 1$ のときには、左辺が負になるので[34]は成り立たない。つまり、 $\eta \leq 1$ であれば不

安定モードは存在しない。言いかえると、不安定モードが存在するためには、 $\eta > 1$ でなければならない。これは、不安定モードが存在するための必要条件である。

6. 2 上昇流域と下降流域における支配方程式

ここで、支配方程式[28]を用いて不安定モードの構造を求める。本来、エクマン収束に伴う潜熱加熱の係数 η は、 $\omega_4 < 0$ つまり上昇流のときは $\eta > 0$ であり、 $\omega_4 > 0$ つまり下降流のときは $\eta = 0$ である。そこで、 $r = a$ より内側は上昇流域、外側は下降流域とする。このとき、 $r < a$ ではエクマン収束に伴う潜熱加熱の係数は $\eta > 0$ 、 $r > a$ では $\eta = 0$ となる。しかし、全区間にわたって係数 η が 1 以下であれば不安定モードは存在しないことがわかっている。したがって、 $r < a$ での係数は $\eta > 1$ でなければならない。区間 $r < a$ と $r > a$ において、[28]は、それぞれ、

$$\{K(\eta-1)-\sigma\} \frac{d}{dr} \left\{ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r \hat{u}_3) \right\} + \left(\frac{K}{2} + \sigma \right) \hat{u}_3 = 0 \quad (r < a) \quad [35]$$

$$(-K-\sigma) \frac{d}{dr} \left\{ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r \hat{u}_3) \right\} + \left(\frac{K}{2} + \sigma \right) \hat{u}_3 = 0 \quad (r > a) \quad [36]$$

と書ける。

また、 $r = 0$ および $r \rightarrow \infty$ における境界条件として、

$$\hat{u}_3 = 0 \quad (r = 0) \quad [37]$$

$$\hat{u}_3 \rightarrow 0 \quad (r \rightarrow \infty) \quad [38]$$

が成り立っている。

さらに、上昇流域と下降流域との境界 $r = a$ における[35]の解と[36]の解の接続条件を考える。 $r = a$ で ω が有限な値を持つためには、連続の式[3]より、 \hat{u}_3 は連続でなければならない。つまり、

$$\hat{u}_3|_{r=a-0} = \hat{u}_3|_{r=a+0} \quad [39]$$

である。また、 $r = a$ で v が有限な値を持つためには、温度風の関係[7]より、 θ は連続でなければならない。したがって、[15]より、

$$\omega_2 - \eta \omega_4|_{r=a-0} = \omega_2|_{r=a+0} \quad [40]$$

となる。[12]、[13]を代入すると、

$$-(1-\eta) \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_1) + \eta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_3) \Big|_{r=a-0} = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_1) \Big|_{r=a+0} \quad [41]$$

が得られる。一方、[16]に[12]、[13]を代入すると、

$$\left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_1) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_3) \right\} \Delta p = \epsilon \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r v_3)$$

となる。両辺を t で偏微分して、[11]を代入すると、

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru_1) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru_3) \right\} = -K \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru_3)$$

が得られ、

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r \hat{u}_1) = - \left(1 + \frac{K}{\sigma} \right) \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r \hat{u}_3) \quad [42]$$

となる。[41]に[42]を代入すると、

$$\left. \left\{ \sigma + K(1-\eta) \right\} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r \hat{u}_3) \right|_{r=a-0} = \left. (\sigma + K) \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r \hat{u}_3) \right|_{r=a+0}$$

つまり、

$$\left. \left\{ \sigma + K(1-\eta) \right\} \left(\frac{d \hat{u}_3}{dr} + \frac{\hat{u}_3}{r} \right) \right|_{r=a-0} = \left. (\sigma + K) \left(\frac{d \hat{u}_3}{dr} + \frac{\hat{u}_3}{r} \right) \right|_{r=a+0} \quad [43]$$

が得られる。[39]と[43]が $r=a$ における接続条件である。

さらに、区間 $r < a$ では $\omega_4 < 0$ 、 $r > a$ では $\omega_4 > 0$ だから、[16]と[11]より、

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r \hat{u}_3) &< 0 \quad (r < a) \\ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r \hat{u}_3) &> 0 \quad (r > a) \end{aligned} \quad [44]$$

である。[43]において、[44]を考慮すると、

$$\sigma + K(1-\eta) < 0$$

つまり、

$$\sigma < K(\eta - 1) \quad [45]$$

が得られる。

6. 3 支配方程式の解法

さて、区間 $r > a$ において、 \hat{u}_3 についての微分方程式[36]は、

$$\frac{d}{dr} \left\{ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r \hat{u}_3) \right\} + \mu \hat{u}_3 = 0 \quad [46]$$

のように変形できる。ただし、

$$\mu = \mu_2 = - \frac{\frac{K}{2} + \sigma}{K + \sigma} \quad [47]$$

であり、常に $\mu_2 < 0$ である。したがって、微分方程式[46]は**変形されたベッセルの微分方程式**(modified Bessel's differential equation)に帰着できる。ゆえに、**第1種変形ベッセル関数**(modified Bessel function of the first kind)と**第2種変形ベッセル関数**(modified Bessel function of the second kind)が[46]を満たすが、境界条件[38]より、第2種ベッセル関数 $K_1(\sqrt{-\mu_2} r)$ が解となる。つまり、

$$\hat{u}_3 = C_2 K_1(\sqrt{-\mu_2} r) \quad (r > a) \quad [48]$$

である。

次に、区間 $r < a$ における解を検討する。微分方程式[35]を[46]のように変形したとき、

$$\mu = \mu_1 = \frac{\frac{K}{2} + \sigma}{K(\eta - 1) - \sigma} \quad [49]$$

であり、[45]より $\mu_1 > 0$ である。したがって、微分方程式[46]は**ベッセルの微分方程式** (Bessel's differential equation) に帰着できる。ゆえに、**ベッセル関数** (Bessel function) と **ノイマン関数** (Neumann function) が[46]を満たすが、境界条件[37]より、ベッセル関数 $J_1(\sqrt{\mu_1}r)$ が解となる。つまり、

$$\hat{u}_3 = C_1 J_1(\sqrt{\mu_1}r) \quad (r < a) \quad [50]$$

である。

ここで、[50]と[48]に接続条件を適用する。まず、[39]より、

$$C_1 J_1(\sqrt{\mu_1}a) = C_2 K_1(\sqrt{-\mu_2}a) \quad [51]$$

が成り立つ。次に、[43]に、[50]と[48]を代入して、

$$\begin{aligned} & \left\{ \sigma + K(1 - \eta) \right\} C_1 \sqrt{\mu_1} \left\{ J_1'(\sqrt{\mu_1}a) + \frac{J_1(\sqrt{\mu_1}a)}{\sqrt{\mu_1}a} \right\} \\ & = (\sigma + K) C_2 \sqrt{-\mu_2} \left\{ K_1'(\sqrt{-\mu_2}a) + \frac{K_1(\sqrt{-\mu_2}a)}{\sqrt{-\mu_2}a} \right\} \end{aligned}$$

となるが、[49]、[47]より、 σ と K を消去すると、

$$C_1 \frac{1}{\sqrt{\mu_1}} \left\{ J_1'(\sqrt{\mu_1}a) + \frac{J_1(\sqrt{\mu_1}a)}{\sqrt{\mu_1}a} \right\} = C_2 \frac{1}{\sqrt{-\mu_2}} \left\{ K_1'(\sqrt{-\mu_2}a) + \frac{K_1(\sqrt{-\mu_2}a)}{\sqrt{-\mu_2}a} \right\} \quad [52]$$

が得られる。[51]、[52]より、 C_1 と C_2 を消去すると、

$$\frac{1}{\sqrt{\mu_1}} \frac{J_1'(\sqrt{\mu_1}a) + \frac{J_1(\sqrt{\mu_1}a)}{\sqrt{\mu_1}a}}{J_1(\sqrt{\mu_1}a)} = \frac{1}{\sqrt{-\mu_2}} \frac{K_1'(\sqrt{-\mu_2}a) + \frac{K_1(\sqrt{-\mu_2}a)}{\sqrt{-\mu_2}a}}{K_1(\sqrt{-\mu_2}a)} \quad [53]$$

が導かれる。ここで、

$$\frac{d^2}{dx^2} J_0(x) + \frac{1}{x} \frac{d}{dx} J_0(x) + J_0(x) = 0$$

の両辺を x で微分すると、

$$\frac{d^2}{dx^2} \frac{d}{dx} J_0(x) + \frac{1}{x} \frac{d}{dx} \frac{d}{dx} J_0(x) + \left(1 - \frac{1}{x^2}\right) \frac{d}{dx} J_0(x) = 0$$

となるから、 $J_0'(x)$ を $J_1(x)$ とみなすことができる。実際には、係数の定義上、符号が反転し、

$$J_0'(x) = -J_1(x)$$

である。同様に、

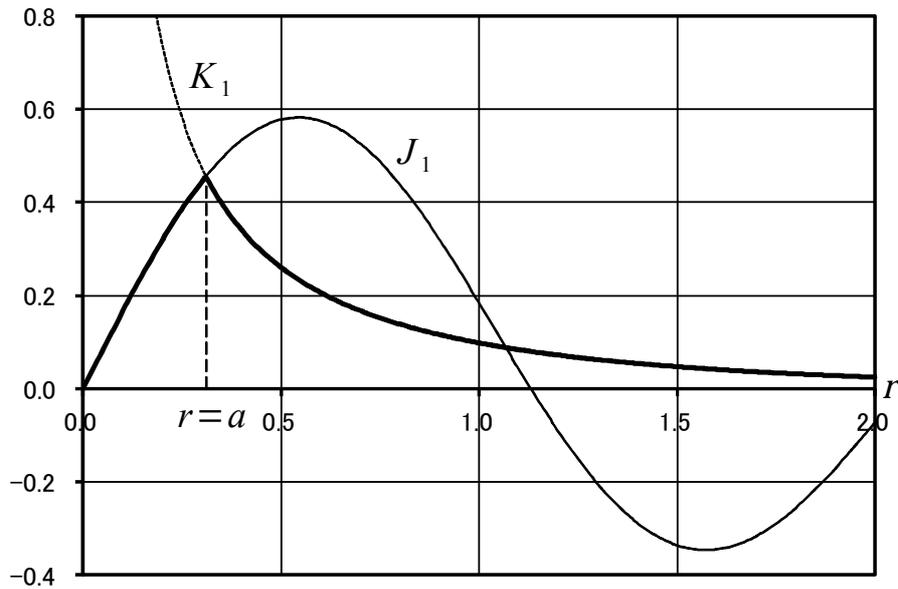
$$K_0'(x) = -K_1(x)$$

も成り立つ。これらを考慮すると、[53]は、

$$\frac{1}{\sqrt{\mu_1}} \frac{J_0(\sqrt{\mu_1}a)}{J_1(\sqrt{\mu_1}a)} = \frac{1}{\sqrt{-\mu_2}} \frac{K_0(\sqrt{-\mu_2}a)}{K_1(\sqrt{-\mu_2}a)} \quad [54]$$

と書くこともできる。[45]を満たす範囲で σ の値を与えると、[49]と[47]から μ_1 と μ_2 の値が求まる。さらに、[53]または[54]から a の値が求まり、[51]から C_2/C_1 が決まる。

以下に、 $\eta=3$ 、 $\sigma=1.8K$ の場合の \hat{u}_3 の分布を示す。[45]より最大成長率は $\sigma_{max}=2K$ なので、この分布が最大成長率に近い成長率をもつ不安定モードである。 r はロスビーの内部変形半径によって規格化されているので、注意する。



\hat{u}_3 の分布

上昇流域の外側 ($r > a$) では、熱帯低気圧の中心に近づくにつれて風速は加速度的に大きくなる。上昇流域 ($r < a$) に入ると、逆に中心に近づくにつれて風速は小さくなることがわかる。

次に、鉛直流 ω_4 の分布を求める。[16]より、

$$\omega_4 = -\epsilon \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_3)$$

であるが、今は r が λ によって規格化されているので、

$$\omega_4 = -\epsilon \frac{1}{\lambda r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_3)$$

と表される。両辺を t で偏微分すると、

$$\frac{\partial}{\partial t} \omega_4 = -\epsilon \frac{1}{\lambda r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial t} v_3 \right)$$

が得られる。ここで、右辺に[11]を代入し、さらに $u_3 = \hat{u}_3 \exp(\sigma t)$ 、 $\omega_4 = \hat{\omega}_4 \exp(\sigma t)$ とおくと、

$$\hat{\omega}_4 = \frac{f \epsilon}{\sigma \lambda} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r \hat{u}_3) = \frac{f \epsilon}{\sigma \lambda} \left(\frac{d \hat{u}_3}{dr} + \frac{\hat{u}_3}{r} \right) \quad [55]$$

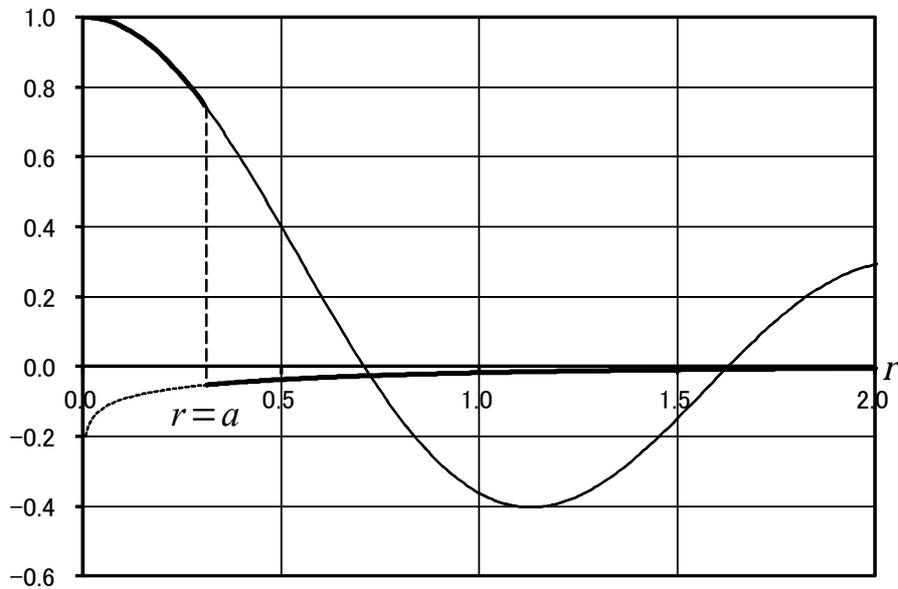
となる。 $r < a$ において、 $\hat{u}_3 = C_1 J_1(\sqrt{\mu_1} r)$ を代入すると、

$$\begin{aligned} \hat{\omega}_4 &= \frac{f \epsilon}{\sigma \lambda} C_1 \sqrt{\mu_1} \left\{ J_1'(\sqrt{\mu_1} r) + \frac{J_1(\sqrt{\mu_1} r)}{\sqrt{\mu_1} r} \right\} \\ &= -\frac{f \epsilon}{\sigma \lambda} C_1 \sqrt{\mu_1} \left\{ J_0''(\sqrt{\mu_1} r) + \frac{J_0'(\sqrt{\mu_1} r)}{\sqrt{\mu_1} r} \right\} \\ &= \frac{f \epsilon}{\sigma \lambda} C_1 \sqrt{\mu_1} J_0(\sqrt{\mu_1} r) \end{aligned} \quad [56]$$

が得られる。同様に、 $r > a$ において、 $\hat{u}_3 = C_2 K_1(\sqrt{-\mu_2} r)$ を代入すると、

$$\hat{\omega}_4 = -\frac{f \epsilon}{\sigma \lambda} C_2 \sqrt{-\mu_2} K_0(\sqrt{-\mu_2} r) \quad [57]$$

となる。以下に、 $\hat{\omega}_4$ の分布を示す。上昇流域内 ($r < a$) ではエクマン収束に対応する上昇流がみられる。一方、上昇流域の外側 ($r > a$) では、比較的弱い下降流が生じている。円筒座標であることを考慮して $\hat{\omega}_4$ を領域全体で積分するとゼロになる。



$\hat{\omega}_4$ の分布

さらに、下層の気圧 Φ_3 の分布を求める。地衡風平衡[4]より、

$$fv_3 - \frac{\partial \Phi_3}{\partial r} = 0$$

であるが、今は r が λ によって規格化されているので、

$$fv_3 - \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \Phi_3}{\partial r} = 0$$

と表される。両辺を t で偏微分すると、

$$f \frac{\partial}{\partial t} v_3 - \frac{1}{\lambda} \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial}{\partial t} \Phi_3 = 0$$

が得られる。ここで、左辺第1項に[11]を代入し、さらに $u_3 = \hat{u}_3 \exp(\sigma t)$ 、 $\Phi_3 = \hat{\Phi}_3 \exp(\sigma t)$ とおくと、

$$\frac{d}{dr} \hat{\Phi}_3 = -\frac{f^2 \lambda}{\sigma} \hat{u}_3 \quad [58]$$

となる。 $r > a$ において、[58]に $\hat{u}_3 = C_2 K_1(\sqrt{-\mu_2} r)$ を代入すると、

$$\frac{d}{dr} \hat{\Phi}_3 = -\frac{f^2 \lambda}{\sigma} C_2 K_1(\sqrt{-\mu_2} r)$$

が得られる。 $r \rightarrow \infty$ で $\hat{\Phi}_3 \rightarrow 0$ であることを考慮して、 r について積分すると、

$$\hat{\Phi}_3 = \frac{f^2 \lambda}{\sigma} \frac{C_2}{\sqrt{-\mu_2}} K_0(\sqrt{-\mu_2} r) \quad [59]$$

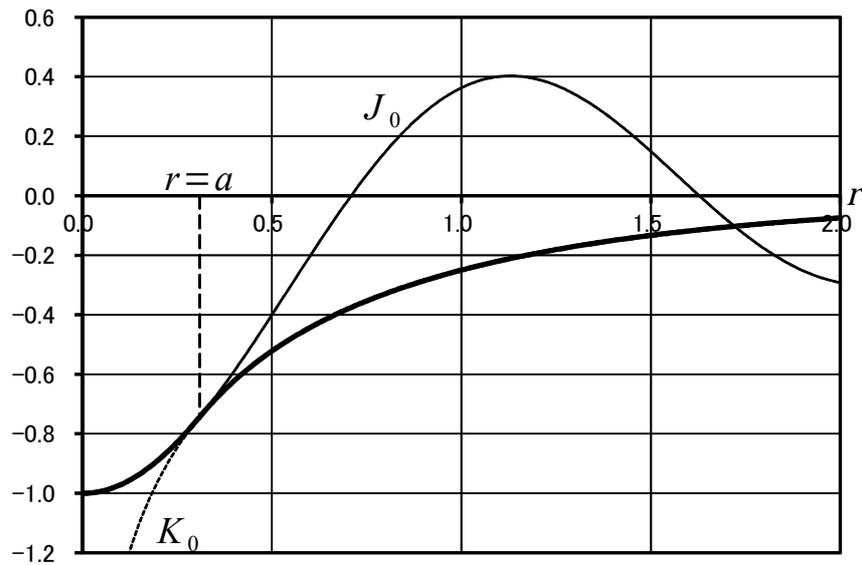
となる。一方、 $r < a$ において、[58]に $\hat{u}_3 = C_1 J_1(\sqrt{\mu_1} r)$ を代入すると、

$$\frac{d}{dr} \hat{\Phi}_3 = -\frac{f^2 \lambda}{\sigma} C_1 J_1(\sqrt{\mu_1} r)$$

が得られる。 $r = a$ で[59]と連続であることを考慮して、 r について積分すると、

$$\hat{\Phi}_3 = \frac{f^2 \lambda}{\sigma} \frac{C_2}{\sqrt{\mu_1}} J_0(\sqrt{\mu_1} r) \quad [60]$$

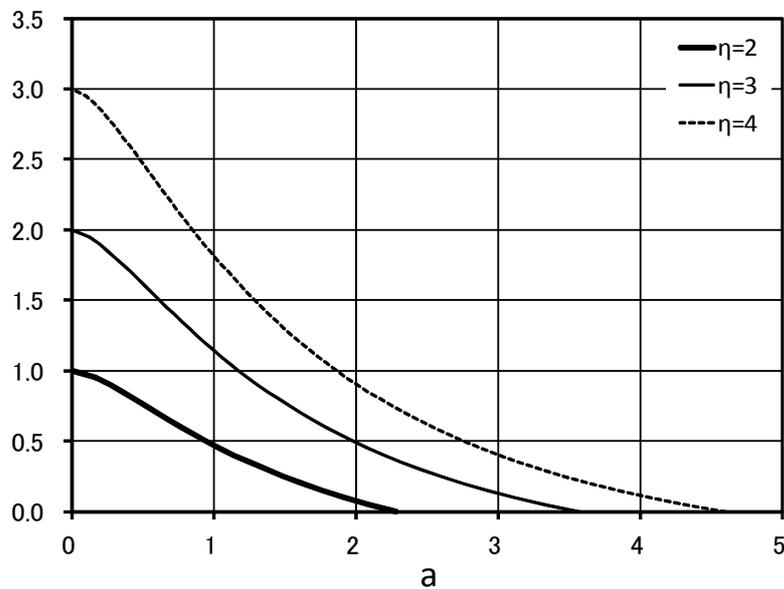
となる。以下に、 $\hat{\Phi}_3$ の分布を示す。中心に近づくにつれて気圧が低くなっていることが確かめられる。



$\hat{\phi}_3$ の分布

6. 4 上昇流域の半径と成長率

上昇流域の半径 a と成長率 $\frac{\sigma}{K}$ との関係を図に示す。上昇流域の半径はあらかじめ変形半径 λ で規格化されている。また、成長率 σ は K で規格化されている。



上昇流域の半径と成長率との関係

エクマン収束に伴う潜熱加熱の係数 η が大きいほうが成長率が大きくなる。また、成長するためには上昇流域の半径に上限があり、上昇流域の半径が小さいほど成長率は大きくな

る。この結果は、上昇流域が小さければ小さいほどじょう乱が速く成長することを示しているが、現実の熱帯低気圧の発達とは整合しない。現実の大气においては、小さいじょう乱ほど粘性の影響を受けやすいことや、有限の振幅では非線形の効果が効くことなどにより、一定の大きさを持ったじょう乱が成長していると考えられる。典型的な条件として、 $K=2\times 10^{-6}$ /s、 $\lambda=1\times 10^6$ m、 $\eta=3$ とすると、最大成長率のじょう乱が e 倍に成長するのにかかる時間は約 3 日である。

補遺 ベッセル関数

一般に、微分方程式

$$\frac{d}{dr} \left\{ \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (ru) \right\} + \mu u = 0 \quad [1]$$

の解を考える。[1]を変形すると、

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du}{dr} + \left(\mu - \frac{1}{r^2} \right) u = 0 \quad [2]$$

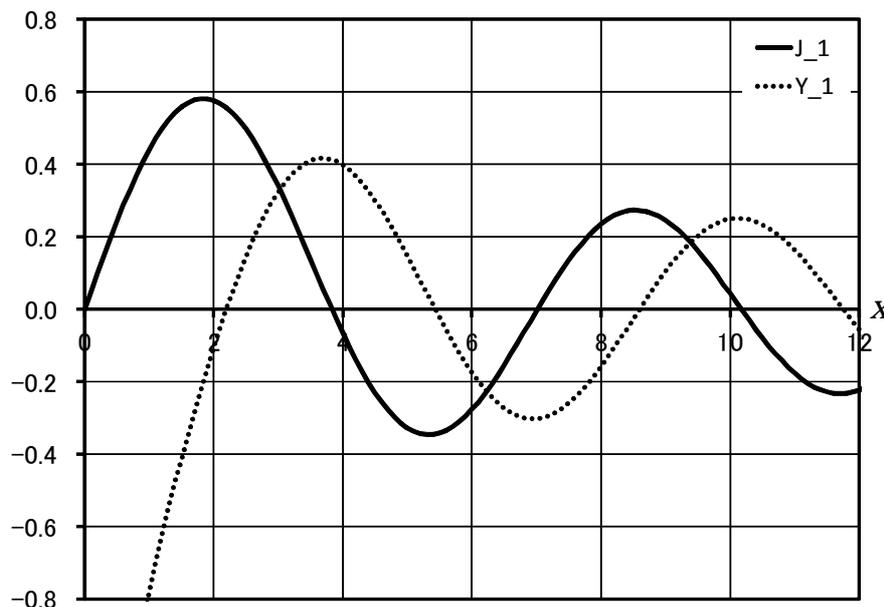
または

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{du}{dr} \right) - \frac{u}{r^2} = -\mu u$$

のように書ける。この微分方程式は、 $\mu > 0$ の場合には、 $x = \sqrt{\mu} r$ とおくことによって、

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{du}{dx} + \left(1 - \frac{n^2}{x^2} \right) u = 0 \quad [3]$$

のように変形できる。この方程式を**ベッセルの微分方程式**(Bessel's differential equation)という。方程式[2]はベッセルの微分方程式で $n=1$ の場合に相当する。一般にベッセルの微分方程式の解は**ベッセル関数**(Bessel function) $J_n(x)$ と**ノイマン関数**(Neumann function) $Y_n(x)$ である。



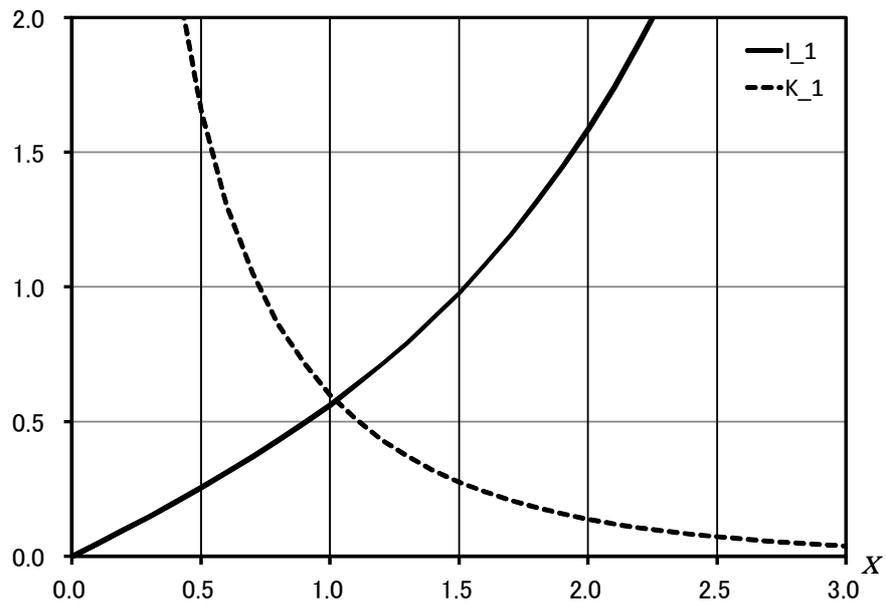
ベッセル関数 $J_1(x)$ とノイマン関数 $Y_1(x)$

また、 $\mu < 0$ の場合には、 $x = \sqrt{-\mu} r$ とおくことによって、

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{du}{dx} - \left(1 + \frac{n^2}{x^2} \right) u = 0 \quad [4]$$

のように変形できる。この方程式を**変形されたベッセルの微分方程式**(modified Bessel's differential equation)という。 $\mu < 0$ のときには、方程式[2]は変形されたベッセルの微分方程式

式で $n=1$ の場合に相当する。変形されたベッセルの微分方程式の解は**第1種変形ベッセル関数**(modified Bessel function of the first kind) $I_n(x)$ と **第2種変形ベッセル関数**(modified Bessel function of the second kind) $K_n(x)$ である。



第1種変形ベッセル関数 $I_n(x)$ と第2種変形ベッセル関数 $K_n(x)$

参考文献：

- Charney, J. G., and A. Eliassen, 1964: On the growth of the hurricane depression. *J. Atmos. Sci.*, **21**, 68-75.
- Ogura, Y., 1964: Frictionally controlled, thermally driven circulations in a circular vortex with application to tropical cyclones. *J. Atmos. Sci.*, **21**, 610-621.
- 小倉義光, 1978: 气象力学通論. 東京大学出版会, 249pp.