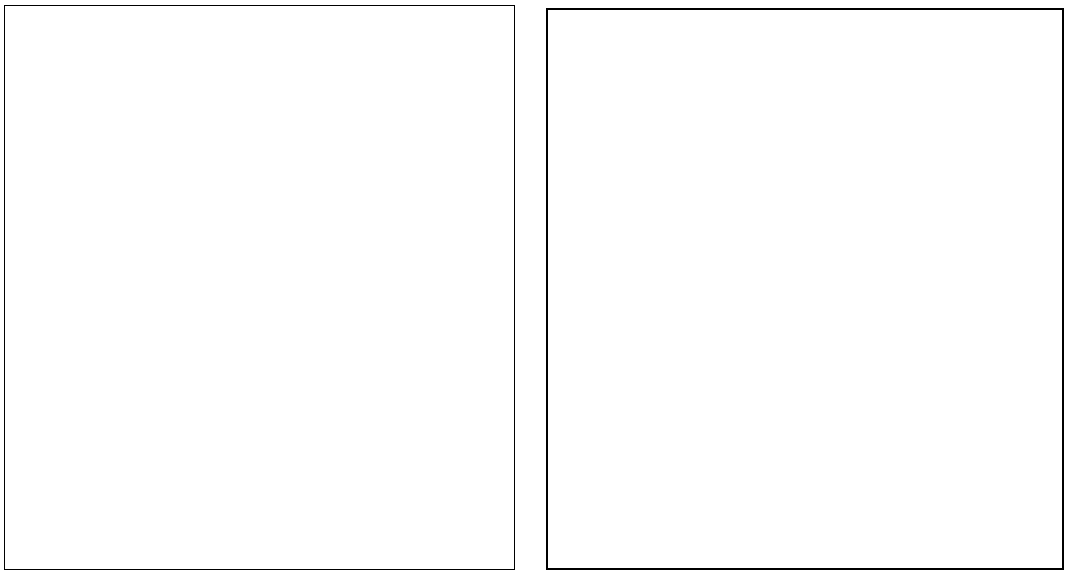
## ５　第２種条件つき不安定（１）

### ５．１　熱帯低気圧の発達の概観

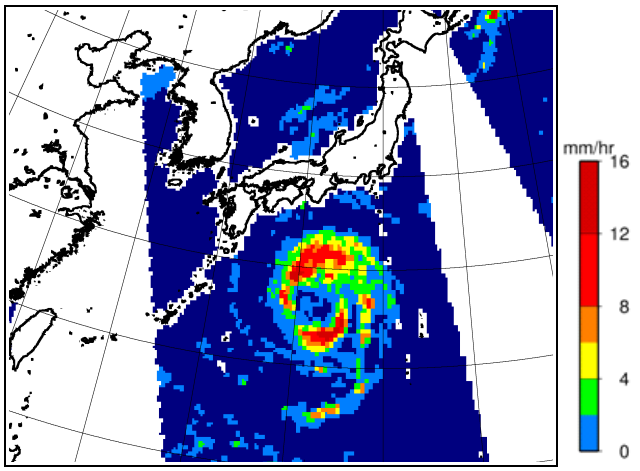
北西太平洋において、中心付近の風速が 17.2m/s 以上の熱帯低気圧を台風という。台風は巨大な渦であり、反時計回りに風が吹きこんでいる。気象衛星による雲画像を使うと、渦巻き状の構造を確かめることができる。台風（熱帯低気圧）は温帯低気圧とは違い、軸対称な構造をしている。天気図上では、台風の中心のまわりの等圧線は同心円状に密集している。温度分布も軸対称であり、対流圏内では、凝結熱の影響により周囲より気温が高くなっている。このため、静水圧平衡の関係から、上空にいくほど低気圧偏差は小さくなる。



（気象庁より、北海道放送のウェブサイトを通して入手）

台風の例（2011 年台風 6 号）
地上天気図（左）と 500hPa 天気図（右）（いずれも 2011 年 7 月 17 日 21 時）

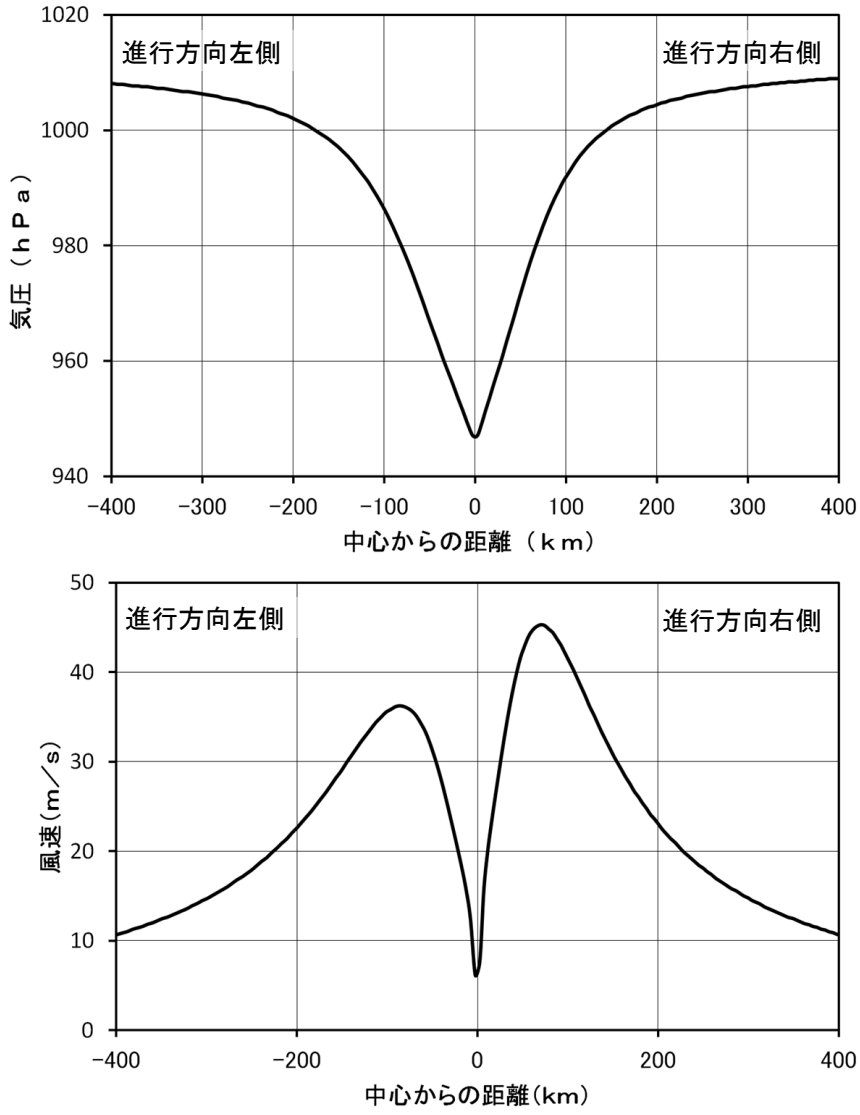
一般に台風は中心に近づくほど風速が大きくなるが、中心付近では風が弱く晴れている場合がある。これを台風の目という。**台風の目**(typhoon eye)は雲画像で確認できることが多い。台風の目は、中心に向かって吹きこんできた風が遠心力の影響でそれ以上近づくことができない領域であると考えられ、周囲の積乱雲に伴う上昇気流の補償下降気流が生じている。このため、台風の目の中では雲は発達しくい。台風の目は非常に背の高い積乱雲に囲まれている。これらの積乱雲を**壁雲**(wall cloud)という。壁雲のまわりでは、やや背の低い積乱雲がらせん状に連なっている。これを**スパイラルバンド**(spiral band)という。




（赤外画像は気象庁のウェブサイトより入手、降水量は AMSR-E のデータを用いて作成）

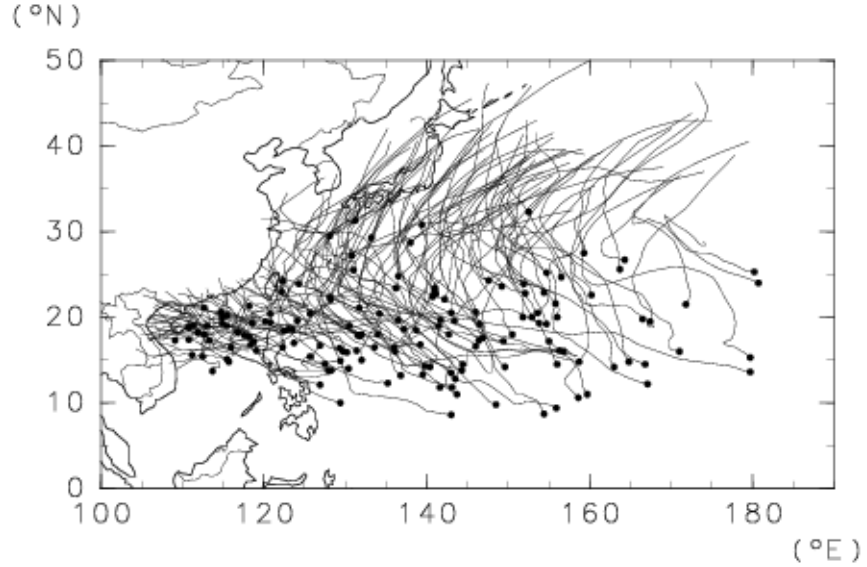
台風の例（2011 年台風 12 号）

赤外画像（2011 年 9 月 1 日 12 時）（左）と衛星観測による降水量（右）

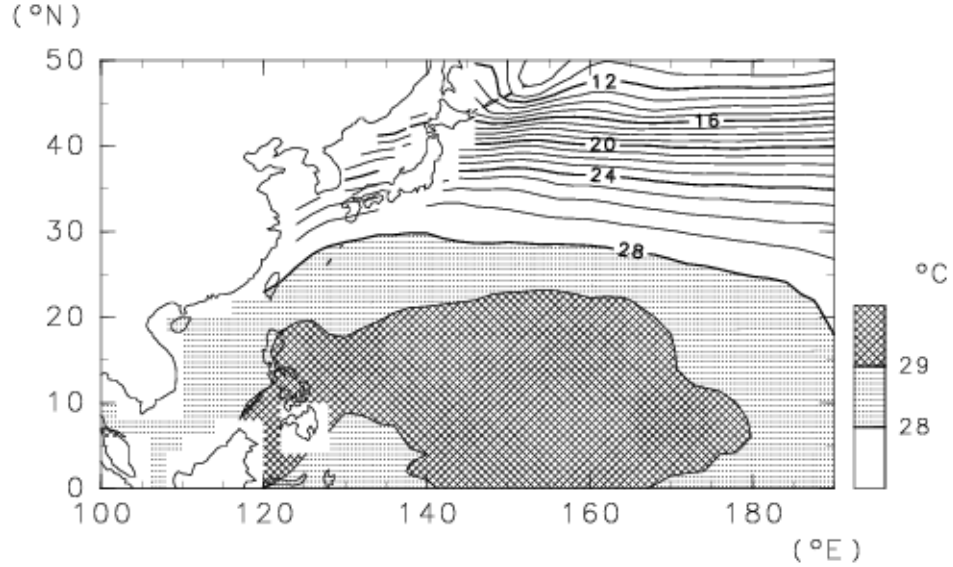



台風の中心のまわりの風速（上）と気圧（下）の分布の模式図

熱帯低気圧は、海面水温の高い海域でばらばらに発生していた積乱雲が集中して組織化することによって発生する。熱帯低気圧が渦として発生、発達するためには、コリオリ力が必要である。実際に、地球の自転の効果であるコリオリ力がはたらかない赤道付近では、海面水温が高くても、熱帯低気圧は発生しない。




台風の発生場所と経路（９月）




海面水温（９月）

（気象庁によるデータを用いて作成）

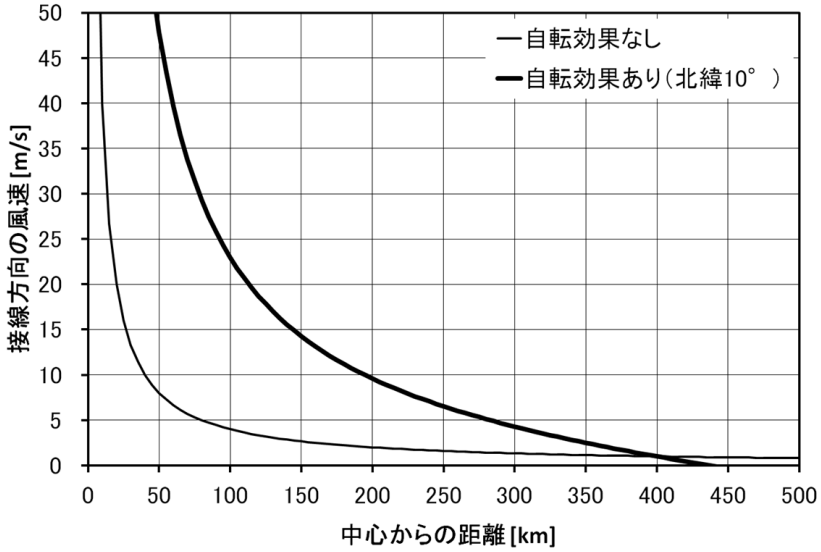
ここで、角運動量保存則を用いて、渦の発達における地球の自転の効果を評価する。熱帯低気圧の中心のまわりの風のうち、円周方向の成分を $v$ とする。中心からの距離を $r$ とすれば、単位質量あたりの角運動量 $L$ は、

$$L = rv$$

である。しかし、角速度 $\Omega$ で回転している地球上での運動を考えているので、自転に伴う角運動量も考慮に入れる必要がある。緯度 $\phi$ における有効な自転角速度は $\Omega \sin\phi$ である。この回転に伴う運動を加えて、

$$L_{abs} = r\left(r\,\Omega \sin\phi + v\right) = r^2 \Omega \sin\phi + rv$$

とする。これを**絶対角運動量**(absolute angular momentum)という。地面との摩擦の影響を無視した場合、絶対角運動量は保存する。赤道上（$\phi = 0°$）では、自転の効果が効かないので、単純に $L=rv$ が保存する、つまり、中心からの距離に反比例して円周方向の風速が増大する。赤道から離れると、はじめに円周方向の風速 $v$ がゼロであっても、自転の効果により、絶対角運動量を持つことができる。このような空気が中心に近づくと、急激に風速が増大する。熱帯低気圧の中心付近の強い風はこのようにして生じる。したがって、熱帯低気圧が発生するのは通常、地球の自転の効果が有効にはたらく、緯度が 5〜10°よりも高緯度側の領域である。




絶対角運動量保存のもとでの風速分布の例

一度、低気圧性の渦ができると、海面付近の空気は渦の中心付近に集まり、上昇気流が生じる。一般に成層大気中で上昇気流が生じると、温位の低い空気が上昇してくるので温度は低下する。しかし、じゅうぶんに水蒸気が供給されている環境では、水蒸気の凝結によって潜熱が放出され逆に加熱される。すると、低気圧がますます強くなり、気圧勾配の強化や水平風の収束により渦が強化される。このような連鎖によって、渦は加速度的に発達していく。これを**第２種条件つき不安定**(conditional instability of the second kind; CISK)という。熱帯低気圧は第２種条件つき不安定によって発達すると考えられる。

## ５．２　基本方程式系

プリミティブ方程式系を用いて、軸対称な構造を持つ熱帯低気圧の発生、発達を、第２種条件つき不安定という観点で考察する。まず、中心を原点とする円筒座標系で、円周方向の運動方程式を考える。原点に関して対称な場を考えているので、気圧は円周方向には一様であって、気圧傾度力ははたらかない。また、微小振幅を考えるので、２次の量である移流項は考えなくてよい。したがって、時間変化項とコリオリ力のみを考えて、運動方程式は、

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -fu \qquad [1]$$

と書ける。ここで、$u$ は風速の半径 $r$ の方向の成分、$v$ は円周方向の成分であり、$f$ はコリオリ係数である。

一方、半径方向の運動方程式は、気圧傾度力も考慮に入れて、

$$\frac{\partial u}{\partial t} = fv - \frac{\partial \Phi}{\partial r} \qquad [2]$$

となる。$\Phi$ はジオポテンシャルである。

次に、連続の式は、円筒座標系であることに注意して、

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(ru) + \frac{\partial \omega}{\partial p} = 0 \qquad [3]$$

と表せる。ここで、$\omega$ は鉛直 $p$ 速度である。

いまは、慣性周期より遅い運動の変化を考えている。また、原点のまわりの渦を考えているので、$u$ は $v$ より小さい。したがって、左辺は右辺第 1 項に比べてじゅうぶんに小さい。ゆえに、半径方向の運動方程式は、

$$fv - \frac{\partial \Phi}{\partial r} = 0 \qquad [4]$$

と書ける。つまり、地衡風平衡が成り立っている。微小振幅を考えているので、2 次の量である遠心力は考えなくてよい。気圧 $p$ で偏微分すると、

$$f\frac{\partial v}{\partial p} - \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial p}\right) = 0 \qquad [5]$$

となる。ここで、静水圧平衡を考えると、比容 $\alpha$ を用いて、

$$f\frac{\partial v}{\partial p} + \frac{\partial \alpha}{\partial r} = 0 \qquad [6]$$

と書くことができ、結局、

$$f\frac{\partial v}{\partial p} + \frac{R}{p}\left(\frac{p}{p_0}\right)^{R/C_p}\frac{\partial \theta}{\partial r} = 0 \qquad [7]$$

と表せる。これは温度風の関係である。

また、熱力学方程式は、

$$\frac{\partial}{\partial t}\theta = \Gamma\omega + \eta'\omega_4 \qquad [8]$$

と表せる。ここで、$\Gamma = -\frac{d\bar{\theta}}{dp}$ であり、基本場の成層度を表している。左辺第 2 項の $\omega_4$ は自由大気下端での鉛直 $p$ 速度であり、エクマン境界層上端での鉛直 $p$ 速度 $\omega_E$ に等しいとする。この項は、エクマン境界層上端での上昇流に対応して水蒸気が供給され、潜熱が解放されて非断熱加熱が生じることを表している。係数 $\eta'$ は、現実大気においては、$\omega_E$ が負、つまり上昇流のときは正の値をとり、$\omega_E$ が正、つまり下降流のときはほぼゼロであると考えられる。しかし、ここでは線形論で取り扱うため、とりあえず、$\omega_E$ の符号に関係なく $\eta'$ は正の定数としておく。エクマン境界層上端での上昇流 $\omega_E$ は、渦度 $\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv)$

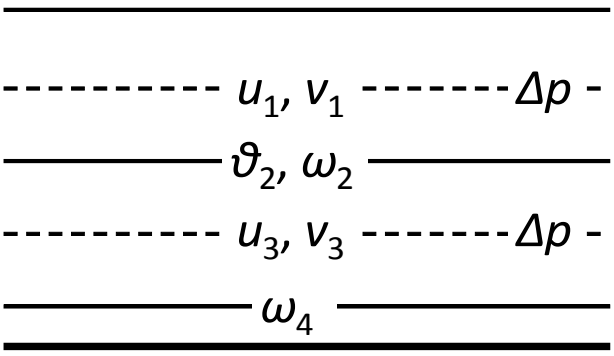
に比例し、

$$\omega_E=-\frac{p_E}{2}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv) \qquad [9]$$

と書ける。 $p_E$ はエクマン境界層の厚さを気圧で表したものである。

## ５．３　２層モデル

対流圏下部のエクマン境界層を除いた対流圏全体を上半分と下半分の 2 層に分けて考える。以下、上半分の層を第 1 層、下半分の層を第 3 層とよび、それぞれの層の厚さを $\Delta p$ とする。また、上半分の層と下半分の層との境界で鉛直流や温位偏差を考えるが、この高度を第 2 層とする。さらに、下半分の層の下端、つまりエクマン境界層の上端を第 4 層とする。




円周方向の運動方程式[1]を第 1 層と第 3 層に適用すると、

$$\frac{\partial}{\partial t}v_1=-f u_1 \qquad [10]$$

$$\frac{\partial}{\partial t}v_3=-f u_3 \qquad [11]$$

が得られる。次に、連続の式[3]を第 1 層と第 3 層に適用すると、

$$\omega_2=-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(ru_1)\Delta p \qquad [12]$$

$$\omega_4=\omega_2-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(ru_3)\Delta p \qquad [13]$$

と表せる。さらに、温度風の関係[7]を第 2 層に適用すると、

$$f(v_1-v_3)=\gamma\frac{\partial\theta_2}{\partial r} \qquad [14]$$

が得られる。ただし、

$$\gamma=\frac{R}{p_2}\left(\frac{p_2}{p_0}\right)^{\frac{R}{C_p}}\Delta p$$

である。続いて、熱力学方程式[8]を第 2 層に適用して、

$$\frac{\partial}{\partial t}\theta_2=\Gamma\omega_2-\eta\Gamma\omega_4 \qquad [15]$$

を得る。ただし、$\eta'=\eta\Gamma$ である。また、$\omega_4=\omega_E$ である。

さらに、エクマン境界層上端での風速の円周方向の成分を $v_3$ で近似すれば、方程式[9]は、

$$\omega_4=\omega_E=-\epsilon\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rv_3) \qquad [16]$$

と書ける。ただし、$\epsilon=\frac{p_E}{2}$ である。ここまでの計算により、7 個の変数 $u_1$、$u_3$、$v_1$、$v_3$、$\omega_2$、$\omega_4$、$\theta_2$ に対して、7 個の方程式[10]～[16]が導かれた。

## ５．４　一変数の支配方程式

方程式系[10]～[16]から不安定モードを導出するため、これらの方程式を解いて一変数の支配方程式を導く。

はじめに、[14]、[15]から変数 $v_1$、$v_3$、$\omega_2$、$\omega_4$、$\theta_2$ を消去する。[14]を $t$ で偏微分して、

$$f\frac{\partial}{\partial t}(v_1-v_3)=\gamma\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial}{\partial t}\theta_2$$

が得られる。[15]を代入すると、

$$f\frac{\partial}{\partial t}(v_1-v_3)=\gamma\Gamma\frac{\partial}{\partial r}\omega_2-\gamma\eta\Gamma\frac{\partial}{\partial r}\omega_4 \qquad [17]$$

となる。ここで、[13]に[12]を代入すると、

$$\omega_4=-\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\{r(u_1+u_3)\}\Delta p \qquad [13']$$

が得られる。[17]に[12]、[13']を代入すると、

$$f\frac{\partial}{\partial t}(v_1-v_3)=-\gamma(1-\eta)\Gamma\Delta p\frac{\partial}{\partial r}\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(ru_1)\right\}+\gamma\eta\Gamma\Delta p\frac{\partial}{\partial r}\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(ru_3)\right\} \qquad [18]$$

となる。[10]、[11]を代入すると、

$$f^2(u_3-u_1)=-\gamma(1-\eta)\Gamma\Delta p\frac{\partial}{\partial r}\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(ru_1)\right\}+\gamma\eta\Gamma\Delta p\frac{\partial}{\partial r}\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(ru_3)\right\} \qquad [19]$$

が得られる。[19]の左辺は、円周方向の風の鉛直シアの時間変化、つまり、温度偏差の半径方向の微分の時間変化に対応している。一方、右辺は半径方向の風の収束・発散に伴って生じる、断熱膨張・圧縮の効果とエクマン収束によって供給された潜熱による加熱の効果の和を表す。大気の温度変化が収束・発散によって生じることを表している。

次に、[11]、[13']、[16]から変数 $v_1$、$v_3$、$\omega_2$、$\omega_4$ を消去する。[16]に[13']を代入すると、

$$\frac{\partial}{\partial r}\left\{r\left(u_1+u_3\right)\right\}\Delta p=\epsilon\frac{\partial}{\partial r}\left(rv_3\right) \qquad [20]$$

が得られる。両辺を $t$ で偏微分すると、

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial r}\left\{r\left(u_1+u_3\right)\right\}\Delta p-\epsilon\frac{\partial}{\partial r}\frac{\partial}{\partial t}\left(ru_3\right)=0 \qquad [21]$$

となる。[11]を代入すると、

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial r}\left\{r\left(u_1+u_3\right)\right\}\Delta p+f\epsilon\frac{\partial}{\partial r}\left(ru_3\right)=0 \qquad [22]$$

が得られる。左辺第 1 項は、鉛直積分した収束・発散の時間変化、第 2 項は下層の渦度の時間変化を表していて、収束・発散が下層の渦度と関連していることを示している。$r=0$ で $u_1=u_3=0$ であることに注意して、この方程式を $r$ で積分すると、

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(u_1+u_3\right)\Delta p+f\epsilon u_3=0 \qquad [23]$$

が得られる。

ここまでの演算によって、2 つの変数 $u_1$ 、 $u_3$ について、2 つの偏微分方程式[19]、[23]が得られた。

[19]を $t$ で偏微分すると、

$$-f^2\frac{\partial}{\partial t}u_1+\gamma(1-\eta)\Gamma\Delta p\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial r}\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(ru_1\right)\right\}$$
$$=-f^2\frac{\partial}{\partial t}u_3+\gamma\eta\Gamma\Delta p\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial r}\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(ru_3\right)\right\}$$

となる。ここで、[23]を用いて $u_1$ を消去すると、

$$f^2\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{f\epsilon}{\Delta p}\right)u_3-\gamma(1-\eta)\Gamma\Delta p\left(\frac{\partial}{\partial t}+\frac{f\epsilon}{\Delta p}\right)\frac{\partial}{\partial r}\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(ru_3\right)\right\}$$
$$=-f^2\frac{\partial}{\partial t}u_3+\gamma\eta\Gamma\Delta p\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial r}\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(ru_3\right)\right\}$$

$$f^2\left(2\frac{\partial}{\partial t}+\frac{f\epsilon}{\Delta p}\right)u_3-\gamma\Gamma\Delta p\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial r}\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(ru_3\right)\right\}-\gamma(1-\eta)\Gamma f\epsilon\frac{\partial}{\partial r}\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(ru_3\right)\right\}=0$$

となって、両辺を $\gamma\Gamma\Delta p$ で割ると、

$$\left\{\frac{f\epsilon}{\Delta p}(\eta-1)-\frac{\partial}{\partial t}\right\}\frac{\partial}{\partial r}\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(ru_3\right)\right\}+\frac{2f^2}{\gamma\Gamma\Delta p}\left(\frac{f\epsilon}{2\Delta p}+\frac{\partial}{\partial t}\right)u_3=0$$

が得られる。ここで、

$$K=\frac{f\epsilon}{\Delta p}=\frac{f\,p_E}{2\Delta p} \qquad [24]$$

$$\lambda^2=\frac{\gamma\Gamma\Delta p}{2f^2}=\frac{1}{2f^2}\frac{R}{p_2}\left(\frac{p_2}{p_0}\right)^{\frac{R}{C_p}}\Delta p\left(-\frac{d\bar{\theta}}{d\,p}\right)\Delta p=\frac{1}{2f^2}\left(g\frac{\Delta\bar{\theta}}{\bar{\theta}_2}\right)\left(\left|\frac{dz}{d\,p}\right|_2\Delta p\right) \qquad [25]$$

とおくと、

$$\left\{K(\eta-1)-\frac{\partial}{\partial t}\right\}\frac{\partial}{\partial r}\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(ru_3)\right\}+\frac{1}{\lambda^2}\left(\frac{K}{2}+\frac{\partial}{\partial t}\right)u_3=0 \qquad [26]$$

と表せる。$K$ は気圧座標でみた自由大気全層に対するエクマン境界層の割合とコリオリ係数との積である。また、$\lambda$ はロスビーの内部変形半径であって、コリオリ係数の逆数に相当する時間に内部重力波が進む距離を表す。典型的な条件では、$K=2\times10^{-6}$ /s、$\lambda=1\times10^{6}$ m である。さらに、$r$ を $\lambda$ で規格化して、$r=\lambda r_*$ とおくと、

$$\left\{K(\eta-1)-\frac{\partial}{\partial t}\right\}\frac{1}{\lambda}\frac{\partial}{\partial r_*}\left\{\frac{1}{\lambda r_*}\frac{1}{\lambda}\frac{\partial}{\partial r_*}(\lambda r_* u_3)\right\}+\frac{1}{\lambda^2}\left(\frac{K}{2}+\frac{\partial}{\partial t}\right)u_3=0$$

となって、

$$\left\{K(\eta-1)-\frac{\partial}{\partial t}\right\}\frac{\partial}{\partial r_*}\left\{\frac{1}{r_*}\frac{\partial}{\partial r_*}(r_* u_3)\right\}+\left(\frac{K}{2}+\frac{\partial}{\partial t}\right)u_3=0$$

が得られる。あらためて $r_*$ を $r$ とおくと、

$$\left\{K(\eta-1)-\frac{\partial}{\partial t}\right\}\frac{\partial}{\partial r}\left\{\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(ru_3)\right\}+\left(\frac{K}{2}+\frac{\partial}{\partial t}\right)u_3=0 \qquad [27]$$

が得られる。[27]は一変数 $u_3$ のみで表した支配方程式である。