

気象学特論（気候力学）

（2018 年度秋学期）

目次

低緯度域の気候力学

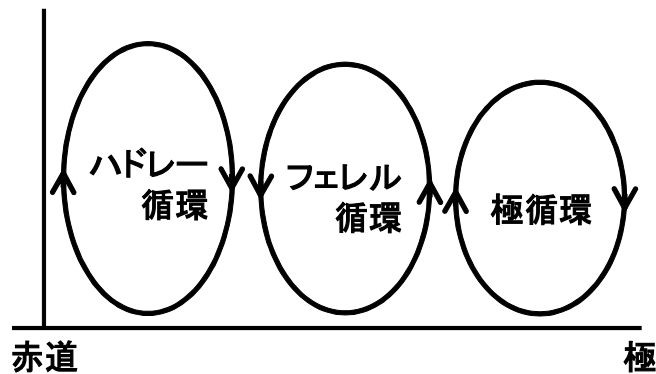
1	ハドレー循環	1
2	浅水方程式系	12
3	赤道波 (1)	20
4	赤道波 (2)	25
5	第2種条件つき不安定 (1)	36
6	第2種条件つき不安定 (2)	45

中高緯度域の気候力学

7	定常ロスビー波 (1)	57
8	定常ロスビー波 (2)	63
9	定常ロスビー波 (3)	74

1 ハドレー循環

地球大気の子午面循環を概観すると、赤道から極に向かって、**ハドレー循環**(Hadley circulation)、**フェレル循環**(Ferrel circulation)、**極循環**(polar circulation)の3胞構造になっていることが知られている。最も低緯度側でみられるハドレー循環は、赤道で上昇し亜熱帯で下降する直接循環であって、低緯度域での熱輸送や運動量輸送において重要な役割を果たしている。**熱帯収束帯**(intertropical convergence zone; ITCZ)や**亜熱帯高圧帯**(subtropical high pressure zone)、**亜熱帯ジェット**(subtropical jet)などは、ハドレー循環に伴って形成されている。したがって、低緯度域だけでなく中高緯度域の気候を考えるうえでも、ハドレー循環は重要である。ここでは、角運動量保存則を用いてハドレー循環について考察する。



子午面循環の模式図

1. 1 角運動量保存則と地衡風平衡

一般に中心力のみがはたらくという条件のもとでは角運動量は保存される。そこで、摩擦がはたらかない対流圏上層では、ハドレー循環による空気塊の南北方向の移動において、地球の自転軸まわりの角運動量は変化しないと考える。上層における東西風速を u とすると、地球の自転軸まわりの角運動量 L は、

$$L = a \cos \phi (a \Omega \cos \phi + u) \quad [1]$$

と書ける。ただし、 a は地球の半径、 Ω は地球の自転角速度、 ϕ は緯度である。角運動量保存則が成り立つ場合、緯度 ϕ によらず角運動量 L は一定である。

一方、地衡風平衡より、

$$u = -\frac{1}{f} \frac{d}{dy} \Phi$$

が成り立つとする。ただし、 f はコリオリ係数、 Φ は上層のある気圧面のジオポテンシャルである。ここで、

$$\begin{aligned} y &= a \phi \\ f &= 2 \Omega \sin \phi \end{aligned}$$

だから、

$$u = -\frac{1}{2a\Omega \sin \phi} \frac{d}{d\phi} \Phi \quad [2]$$

と変形できる。今は対流圏上層のジオポテンシャルに注目している。地上気圧がほぼ一定であるという条件のもとで、理想気体の状態方程式と静水圧平衡を考慮すると、上層のある特定の気圧面の高度は、その緯度における温位の鉛直平均に比例すると考えられる。したがって、気圧面の高さの代表値を H 、 θ をその緯度での温位の鉛直平均、 θ_0 を θ の代表値とすると、気圧面のジオポテンシャル Φ は

$$\Phi = gH \frac{\theta}{\theta_0} \quad [3]$$

と表せる。ただし、 g は重力加速度である。[3]を[2]に代入すると、

$$u = -\frac{gH}{2a\Omega \theta_0 \sin \phi} \frac{d}{d\phi} \theta \quad [4]$$

が得られる。

1. 2 赤道対称なハドレー循環

さて、[1]において、赤道で東西風速 u がゼロである場合を考える。これは、ハドレー循環の上昇流域の中心が赤道にあって、対流圏上層の空気塊が持つ角運動量が赤道上の地表面の角運動量に等しいことを意味する。このとき、上層の空気塊が持つ角運動量 L は、

$$L = a \cos \phi (a \Omega \cos \phi + u) = a^2 \Omega \quad [5]$$

と書ける。つまり、上層の東西風速 u は[5]を満たすような緯度分布を示す。[5]を変形すると、

$$u \cos \phi = a \Omega \sin^2 \phi$$

となるが、ここで、 ϕ が小さいとき

$$\cos \phi \approx 1$$

$$\sin \phi \approx \phi$$

であることを考慮すると、近似として

$$u = a \Omega \phi^2 \quad [6]$$

と書ける。[4]においても同様の近似を行なうと、

$$u = -\frac{gH}{2a\Omega \theta_0 \phi} \frac{d}{d\phi} \theta \quad [7]$$

と表せる。[6]、[7]より、

$$\begin{aligned} a \Omega \phi^2 &= -\frac{gH}{2a\Omega \theta_0 \phi} \frac{d}{d\phi} \theta \\ \frac{d}{d\phi} \theta &= -\frac{2a^2 \Omega^2 \theta_0}{gH} \phi^3 \end{aligned} \quad [8]$$

が得られる。[8]は対流圏上層の東西風の南北分布を決める力学的な制約条件を示している。この制約条件は、定常的な子午面循環が卓越している場合にだけ適用可能である。現実の地球大気においては、低緯度のバドレー循環が卓越している領域でしか成り立たないことに注意する。方程式[8]を緯度について積分することによって決まる温位を θ_M とおく

と、

$$\theta_M = \theta_{M0} - \frac{a^2 \Omega^2 \theta_0}{2gH} \phi^4 \quad [9]$$

が得られる。

春分や秋分には、大気の放射平衡温度（放射平衡温位）は赤道で最も高く、高緯度に行くにつれて低くなっている。このとき、放射平衡温位の南北分布を

$$\theta_E = \theta_{E0} - \Delta\theta \phi^2 \quad [10]$$

と表す。ハドレー循環が生じている緯度帯（ $\phi_1 < \phi < \phi_2$ ）では、実際の温位分布は力学的な制約条件から θ_M に等しくなる。このとき、実際の温位 $\theta = \theta_M$ と放射平衡温位 θ_E との差に対応して、一定の時間スケール τ で放射平衡温度に収束するような加熱・冷却が生じる。つまり、温位 θ のラグランジュ微分について、

$$\frac{D}{Dt} \theta = -\frac{\theta - \theta_E}{\tau} \quad [11]$$

が成り立つ。定常状態では、温位の局所的な時間微分 $\frac{\partial \theta}{\partial t}$ は、すべての緯度においてゼロである。一般に、局所的な時間微分つまりオイラー微分は、ラグランジュ微分と移流項との差に等しいので、定常状態ではラグランジュ微分は移流項に等しい。したがって、ラグランジュ微分[11]の、緯度についての積分は、移流項の積分に等しくなる。ところで、一般に、閉じた循環の内部で積分した場合、移流項の積分はゼロになる。したがって、ラグランジュ微分[11]の積分もゼロである。ゆえに、

$$\int_{\phi_1}^{\phi_2} (\theta_M - \theta_E) d\phi = 0 \quad [12]$$

が成り立つ。[12]は、実際の温位 $\theta = \theta_M$ と放射平衡温位 θ_E との差によって決まる放射加熱を循環の内部で積分するとゼロになるという熱力学的な制約条件を示している。

一方、外側の緯度帯（ $\phi < \phi_1, \phi_2 < \phi$ ）では、放射過程のみによって決まる温位 θ_E の勾配より、対流が生じて角運動量が一定になった場合の温位 θ_M の勾配のほうが大きい。この条件では、対流によって温位勾配を緩和することができないので、対流は生じない。このようなハドレー循環が生じない緯度帯（ $\phi < \phi_1, \phi_2 < \phi$ ）では、移流項がゼロなのでラグランジュ微分もゼロでなければならない。したがって、実際の温位 θ は放射平衡温位 θ_E に等しくなり、

$$\theta = \theta_E \quad (\phi < \phi_1, \phi_2 < \phi)$$

となる。ゆえに、ハドレー循環が生じている緯度帯との境界では、温位の値の連続性より、

$$\theta_M - \theta_E = 0 \quad (\phi = \phi_1, \phi_2) \quad [13]$$

が成り立つ。

いま、赤道対称なハドレー循環を考えているので、

$$\phi_1 = -\phi_P, \phi_2 = \phi_P$$

とおく。このとき、温位の値の連続性[13]より、

$$-\frac{a^2 \Omega^2 \theta_0}{2 g H} \phi_P^4 + \Delta \theta \phi_P^2 + \theta_{M0} - \theta_{E0} = 0 \quad [14]$$

が成り立つ。一方で、熱力学的な制約条件[12]より、

$$-\frac{a^2 \Omega^2 \theta_0}{10 g H} \phi_P^5 + \frac{\Delta \theta}{3} \phi_P^3 + (\theta_{M0} - \theta_{E0}) \phi_P = 0 \quad [15]$$

である。[14]× ϕ_P −[15]より、

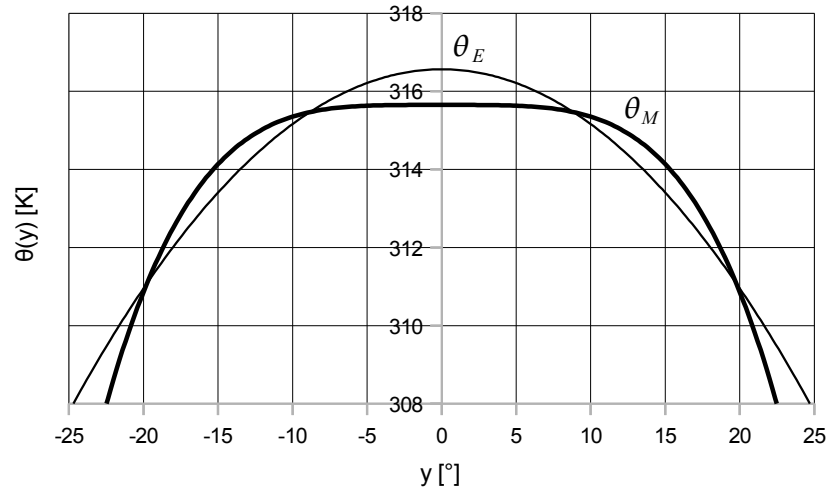
$$-\frac{4 a^2 \Omega^2 \theta_0}{10 g H} \phi_P^5 + \frac{2 \Delta \theta}{3} \phi_P^3 = 0$$

$$\phi_P = \sqrt{\frac{5 g H \Delta \theta}{3 a^2 \Omega^2 \theta_0}} \quad [16]$$

$$\theta_{E0} - \theta_{M0} = \frac{5 g H \Delta \theta^2}{18 a^2 \Omega^2 \theta_0} \quad [17]$$

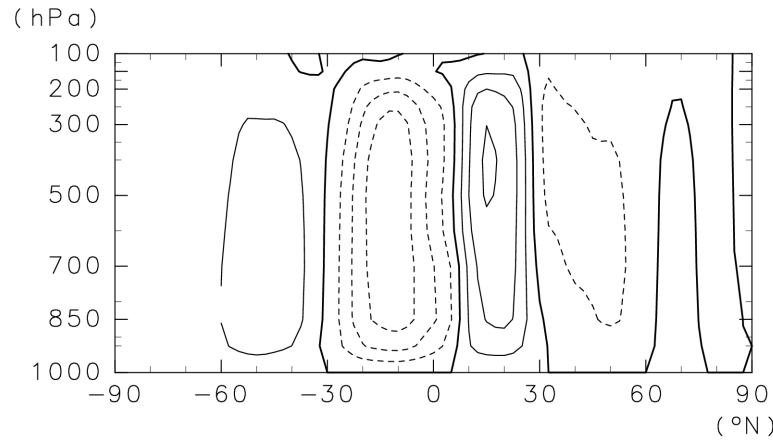
が得られる。

[16]、[17]を満たすような θ_M と θ_E の分布を下の図に示す。ただし、 $\frac{\Delta \theta}{\theta_0} = \frac{40}{255}$ とした。



θ_M と θ_E の分布の例

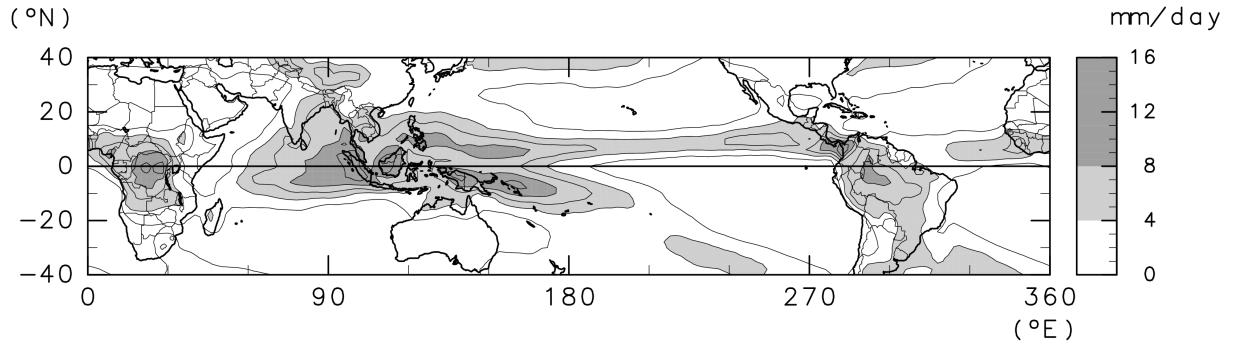
ハドレー循環は緯度 20 度程度まで広がることがわかる。緯度 10 度程度までが上昇流域、緯度 10～20 度程度の範囲が下降流域になる。ハドレー循環の上昇流域は熱帯収束帯に対応し、多量の降水がもたらされる。一方で、下降流域は亜熱帯高圧帯に対応し、乾燥した気候となる。このようなハドレー循環のモデルは、**ヘルド・ハウモデル(Held-Hou model)**とよばれる。このモデルによって、ハドレー循環の南北構造をうまく説明することができる。



(NCEP/NCAR の客観解析データより作成)

子午面循環（年平均）

子午面（南北-鉛直断面）内での流線を表示。正の値（実線）は図面上で時計回り、負（点線）は反時計回りの循環を表す。



(NOAA による GPI データを用いて作成)

降水量の分布（年平均）

ここで、ハドレー循環の強さを検討する。赤道では、対称性から南北方向の温位移流は生じないので、鉛直温位移流と非断熱加熱がつりあうはずである。したがって、

$$w \frac{d\bar{\theta}}{dz} = \frac{\theta_{E0} - \theta_{M0}}{\tau} \quad [18]$$

が成り立つ。上の θ_M と θ_E の分布の計算例では、 $\theta_{E0} - \theta_{M0} = 0.91 \text{ K}$ である。また、

$$\frac{d\bar{\theta}}{dz} = 4 \times 10^{-3} \text{ K/m}, \quad \tau = 8.64 \times 10^5 \text{ s} \text{ とする。このとき、}$$

$$w \sim 2.5 \times 10^{-4} \text{ m/s} \quad [19]$$

と見積もられる。また、ハドレー循環の水平スケール Y は 2000 km 程度、鉛直スケール H は 10 km だから、南北風 v のスケールは、

$$v \sim 5 \times 10^{-3} \text{ m/s} \quad [20]$$

となる。しかし、実際のハドレー循環に伴う南北風は 1 m/s 程度である。ヘルド・ハウモデルによって求められる循環の強さは、実際と比べてかなり小さい。その原因としては、地表面との摩擦を無視していることや、潜熱の放出を考慮に入っていないことなどが挙げられる。

1. 3 赤道非対称なハドレー循環

春分や秋分の時期を除けば、太陽放射による加熱の分布は赤道について対称ではなく、どちらかの半球に偏っている。ここでは、太陽放射による加熱や、それに伴うハドレー循環が、赤道について対称ではない場合を考える。両半球のハドレー循環の境界の緯度を ϕ_C とすると、緯度 ϕ_C の地表面から上昇した上層の空気塊が持つ角運動量 L は、

$$L = a \cos \phi (a \Omega \cos \phi + u) = a^2 \Omega \cos^2 \phi_C \quad [21]$$

だから、

$$\frac{d}{d\phi} \theta = -\frac{2a^2 \Omega^2 \theta_0}{gH} \phi (\phi^2 - \phi_C^2) \quad [22]$$

となつて、

$$\theta_M = \theta_{M0} + \frac{a^2 \Omega^2 \theta_0 \phi_C^2}{gH} \phi^2 - \frac{a^2 \Omega^2 \theta_0}{2gH} \phi^4 \quad [23]$$

が得られる。また、放射平衡温位の南北分布は

$$\theta_E = \theta_{E0} + \Delta \theta_{NS} \phi - \Delta \theta \phi^2 \quad [24]$$

で与えられるとする。このとき、放射平衡温位は緯度 $\phi_0 = \frac{\Delta \theta_{NS}}{2 \Delta \theta}$ で最大になる。以下では、北半球側が夏季である場合 ($\Delta \theta_{NS} > 0$) を想定し、ハドレー循環の北端の緯度を ϕ_S 、南端の緯度を ϕ_W とする。

このとき、温位の値の連続性[13]より、

$$\begin{aligned} -\frac{a^2 \Omega^2 \theta_0}{2gH} \phi_S^4 + \left(\frac{a^2 \Omega^2 \theta_0 \phi_C^2}{gH} + \Delta \theta \right) \phi_S^2 - \Delta \theta_{NS} \phi_S + \theta_{M0} - \theta_{E0} &= 0 \\ -\frac{a^2 \Omega^2 \theta_0}{2gH} \phi_W^4 + \left(\frac{a^2 \Omega^2 \theta_0 \phi_C^2}{gH} + \Delta \theta \right) \phi_W^2 - \Delta \theta_{NS} \phi_W + \theta_{M0} - \theta_{E0} &= 0 \end{aligned}$$

が成り立つ。ここで、

$$\Theta = \frac{a^2 \Omega^2 \theta_0}{gH} \quad [25]$$

とおけば、

$$-\frac{\Theta}{2} \phi_S^4 + (\Theta \phi_C^2 + \Delta \theta) \phi_S^2 - \Delta \theta_{NS} \phi_S + \theta_{M0} - \theta_{E0} = 0 \quad [26]$$

$$-\frac{\Theta}{2} \phi_W^4 + (\Theta \phi_C^2 + \Delta \theta) \phi_W^2 - \Delta \theta_{NS} \phi_W + \theta_{M0} - \theta_{E0} = 0 \quad [27]$$

と表せる。

一方で、熱力学的な制約条件[12]より、

$$\begin{aligned} -\frac{a^2 \Omega^2 \theta_0}{10gH} (\phi_S^5 - \phi_C^5) + \left(\frac{a^2 \Omega^2 \theta_0 \phi_C^2}{3gH} + \frac{\Delta \theta}{3} \right) (\phi_S^3 - \phi_C^3) - \frac{\Delta \theta_{NS}}{2} (\phi_S^2 - \phi_C^2) \\ + (\theta_{M0} - \theta_{E0}) (\phi_S - \phi_C) = 0 \end{aligned}$$

$$-\frac{a^2 \Omega^2 \theta_0}{10 g H} (\phi_W^5 - \phi_C^5) + \left(\frac{a^2 \Omega^2 \theta_0 \phi_C^2}{3 g H} + \frac{\Delta \theta}{3} \right) (\phi_W^3 - \phi_C^3) - \frac{\Delta \theta_{NS}}{2} (\phi_W^2 - \phi_C^2) + (\theta_{M0} - \theta_{E0}) (\phi_W - \phi_C) = 0$$

だから、

$$-\frac{\Theta}{10} (\phi_S^5 - \phi_C^5) + \left(\frac{\Theta \phi_C^2}{3} + \frac{\Delta \theta}{3} \right) (\phi_S^3 - \phi_C^3) - \frac{\Delta \theta_{NS}}{2} (\phi_S^2 - \phi_C^2) + (\theta_{M0} - \theta_{E0}) (\phi_S - \phi_C) = 0 \quad [28]$$

$$-\frac{\Theta}{10} (\phi_W^5 - \phi_C^5) + \left(\frac{\Theta \phi_C^2}{3} + \frac{\Delta \theta}{3} \right) (\phi_W^3 - \phi_C^3) - \frac{\Delta \theta_{NS}}{2} (\phi_W^2 - \phi_C^2) + (\theta_{M0} - \theta_{E0}) (\phi_W - \phi_C) = 0 \quad [29]$$

両辺を $\phi_S - \phi_C$ 、 $\phi_W - \phi_C$ で割って、

$$-\frac{\Theta}{10} (\phi_S^4 + \phi_C \phi_S^3 + \phi_C^2 \phi_S^2 + \phi_C^3 \phi_S + \phi_C^4) + \left(\frac{\Theta \phi_C^2}{3} + \frac{\Delta \theta}{3} \right) (\phi_S^2 + \phi_C \phi_S + \phi_C^2) - \frac{\Delta \theta_{NS}}{2} (\phi_S + \phi_C) + (\theta_{M0} - \theta_{E0}) = 0 \quad [30]$$

$$-\frac{\Theta}{10} (\phi_W^4 + \phi_C \phi_W^3 + \phi_C^2 \phi_W^2 + \phi_C^3 \phi_W + \phi_C^4) + \left(\frac{\Theta \phi_C^2}{3} + \frac{\Delta \theta}{3} \right) (\phi_W^2 + \phi_C \phi_W + \phi_C^2) - \frac{\Delta \theta_{NS}}{2} (\phi_W + \phi_C) + (\theta_{M0} - \theta_{E0}) = 0 \quad [31]$$

が得られる。

[30]–[26]、[31]–[27]より、

$$\frac{\Theta}{10} (4 \phi_S^4 - \phi_C \phi_S^3 - \phi_C^2 \phi_S^2 - \phi_C^3 \phi_S - \phi_C^4) + \left(\frac{\Theta \phi_C^2}{3} + \frac{\Delta \theta}{3} \right) (-2 \phi_S^2 + \phi_C \phi_S + \phi_C^2) + \frac{\Delta \theta_{NS}}{2} (\phi_S - \phi_C) = 0 \quad [32]$$

$$\frac{\Theta}{10} (4 \phi_W^4 - \phi_C \phi_W^3 - \phi_C^2 \phi_W^2 - \phi_C^3 \phi_W - \phi_C^4) + \left(\frac{\Theta \phi_C^2}{3} + \frac{\Delta \theta}{3} \right) (-2 \phi_W^2 + \phi_C \phi_W + \phi_C^2) + \frac{\Delta \theta_{NS}}{2} (\phi_W - \phi_C) = 0 \quad [33]$$

となるが、両辺を $\phi_S - \phi_C$ 、 $\phi_W - \phi_C$ で割ると、

$$\frac{\Theta}{10} (4 \phi_S^3 + 3 \phi_C \phi_S^2 + 2 \phi_C^2 \phi_S + \phi_C^3) + \left(\frac{\Theta \phi_C^2}{3} + \frac{\Delta \theta}{3} \right) (-2 \phi_S - \phi_C) + \frac{\Delta \theta_{NS}}{2} = 0$$

$$\frac{\Theta}{10} (4 \phi_W^3 + 3 \phi_C \phi_W^2 + 2 \phi_C^2 \phi_W + \phi_C^3) + \left(\frac{\Theta \phi_C^2}{3} + \frac{\Delta \theta}{3} \right) (-2 \phi_W - \phi_C) + \frac{\Delta \theta_{NS}}{2} = 0$$

となつて、

$$\phi_S^3 + \frac{3}{4} \phi_C \phi_S^2 + \left(-\frac{7}{6} \phi_C^2 - \frac{5}{3} \frac{\Delta \theta}{\Theta} \right) \phi_S + \left(-\frac{7}{12} \phi_C^3 - \frac{5}{6} \frac{\Delta \theta}{\Theta} \phi_C + \frac{5}{4} \frac{\Delta \theta_{NS}}{\Theta} \right) = 0 \quad [34]$$

$$\phi_W^3 + \frac{3}{4} \phi_C \phi_W^2 + \left(-\frac{7}{6} \phi_C^2 - \frac{5}{3} \frac{\Delta \theta}{\Theta} \right) \phi_W + \left(-\frac{7}{12} \phi_C^3 - \frac{5}{6} \frac{\Delta \theta}{\Theta} \phi_C + \frac{5}{4} \frac{\Delta \theta_{NS}}{\Theta} \right) = 0 \quad [35]$$

が得られる。

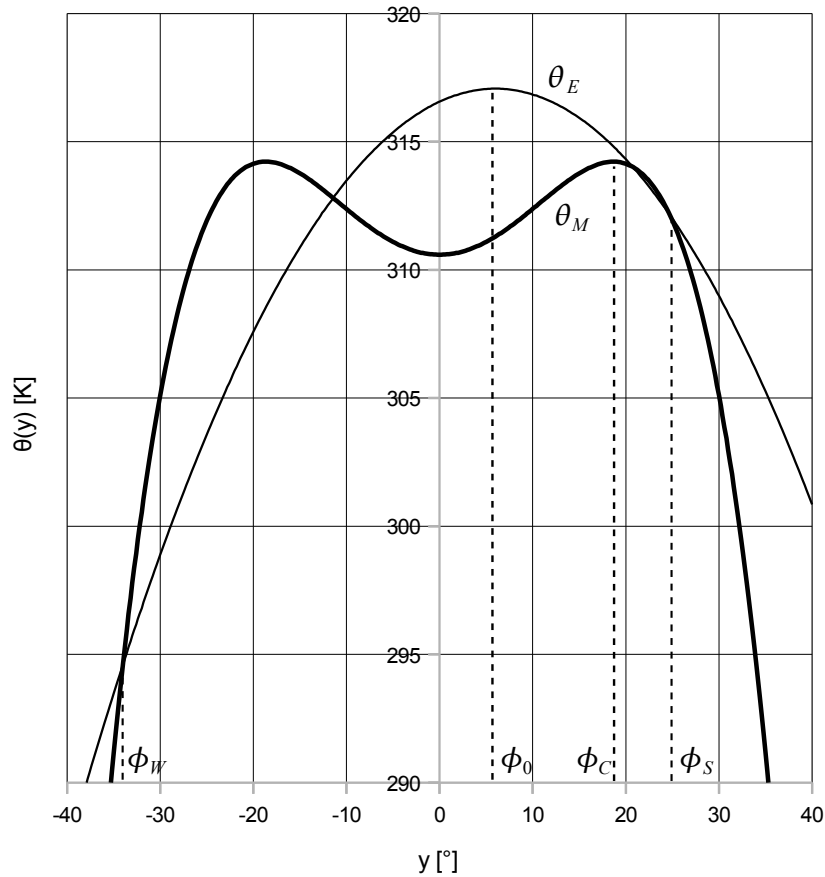
[26]、[27]、[34]、[35]を解いて、 ϕ_S 、 ϕ_W 、 ϕ_C 、 $\theta_{M0}-\theta_{E0}$ を求めればハドレー循環の状態を決定することができる。言いかえると、3次方程式

$$\phi^3 + \frac{3}{4}\phi_C\phi^2 + \left(-\frac{7}{6}\phi_C^2 - \frac{5}{3}\frac{\Delta\theta}{\Theta}\right)\phi + \left(-\frac{7}{12}\phi_C^3 - \frac{5}{6}\frac{\Delta\theta}{\Theta}\phi_C + \frac{5}{4}\frac{\Delta\theta_{NS}}{\Theta}\right) = 0 \quad [36]$$

の解 $\phi=\phi_S$ 、 $\phi=\phi_W$ について、関数

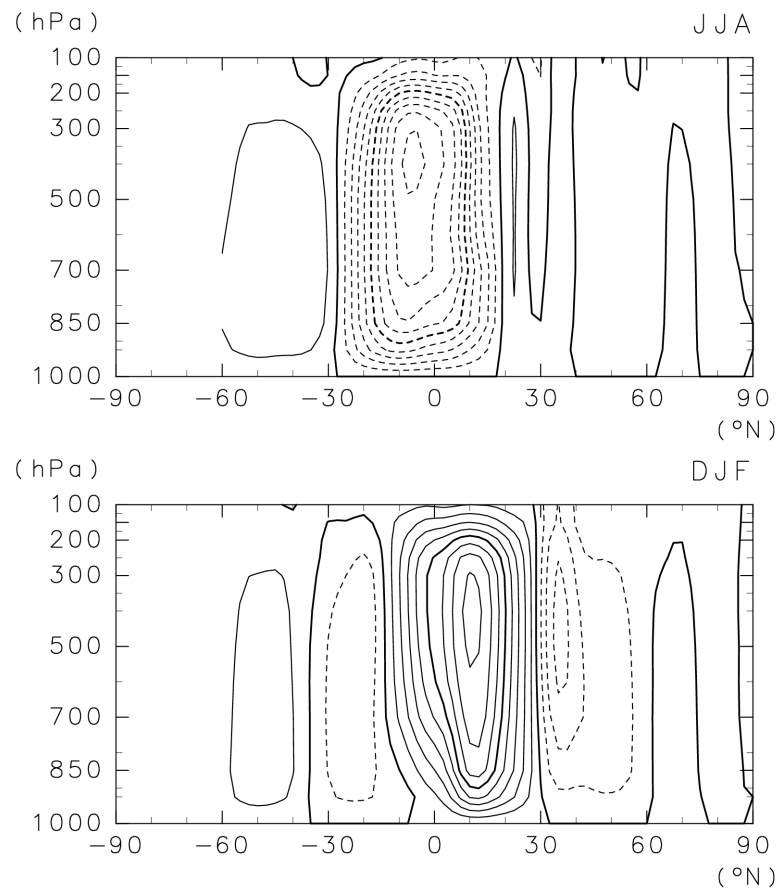
$$f(\phi) = \phi^4 + \left(-2\phi_C^2 - 2\frac{\Delta\theta}{\Theta}\right)\phi^2 + 2\frac{\Delta\theta_{NS}}{\Theta}\phi \quad [37]$$

が等しい値をもつように ϕ_C を定めればよい。



θ_M と θ_E の分布の例（赤道非対称の場合）

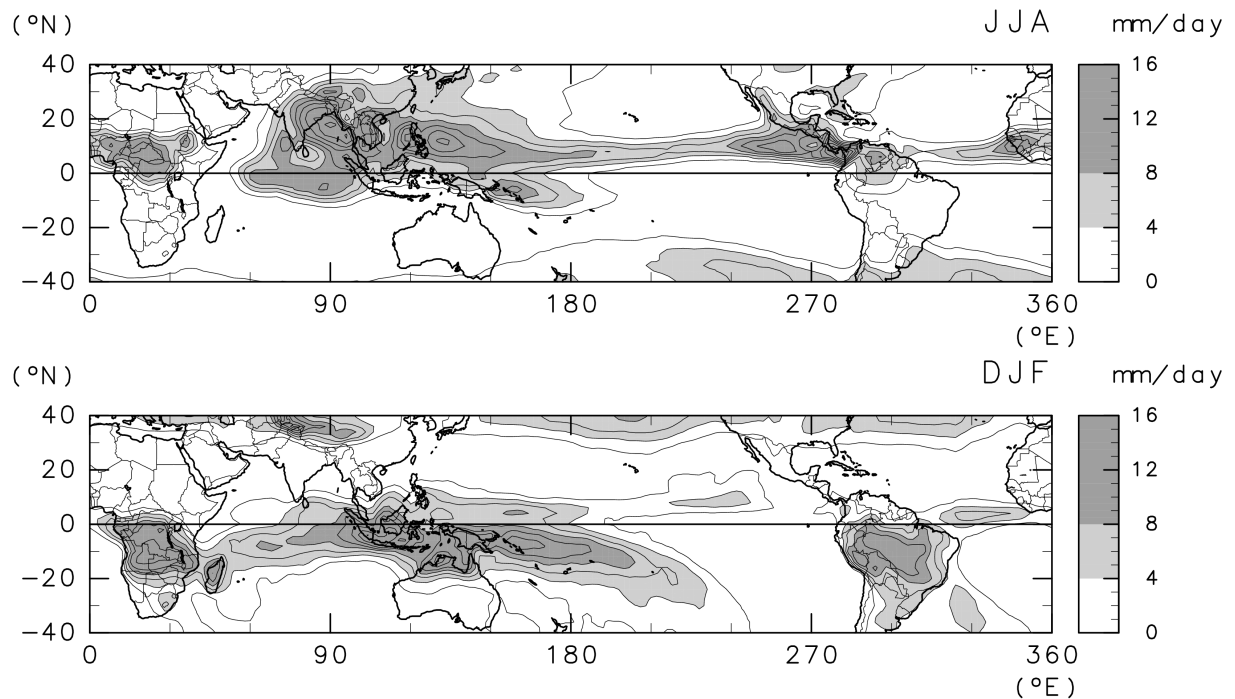
加熱の中心が数度ずれただけでも、両半球のハドレー循環の境界は20度近く移動することがわかる。また、 θ_M と θ_E の差に比例して鉛直流が生じることを考えると、夏半球側のハドレー循環に比べて、冬半球側のハドレー循環のほうがずっと強くなっていることもわかる。冬半球側のハドレー循環は、緯度幅も大きく、北緯35度付近まで達している。冬半球の亜熱帯域では下降気流がとくに顕著になることが示されている。実際に、亜熱帯高压帯では冬季のほうがより乾燥する。



(NCEP/NCAR の客観解析データより作成)

子午面循環（上：6～8月の平均、下：12～2月の平均）

子午面（南北-鉛直断面）内での流線を表示。正の値（実線）は図面上で時計回り、負（点線）は反時計回りの循環を表す。



(NOAA による GPI データを用いて作成)

降水量の分布（上：6～8月の平均、下：12～2月の平均）

問 1.1 赤道対称なハドレー循環において、[16]で表されるハドレー循環の境界の緯度が $\phi_p=20^\circ$ のとき、緯度 ϕ_p での東西風速の値を求め、有効数字 2 けたで答えよ。[6]を用いてよい。地球の半径は $a=6.37\times 10^6$ m、自転角速度は $\Omega=7.29\times 10^{-5}$ /s とする。また、赤道における放射平衡温位と実際の温位との差 $\theta_{E0}-\theta_{M0}$ を求め、有効数字 2 けたで答えよ。放射平衡温位の南北分布は[10]で与えられ、 $\Delta\theta=40$ K とする。[16]、[17]を用いてよい。

参考文献：

Held, I. M., and A. Y. Hou, 1980: Nonlinear axially symmetric circulations in a nearly inviscid atmosphere. *J. Atmos. Sci.*, **37**, 515-533.