第 10 週：　地形データの解析

１．はじめに

たとえば、日本の本州の海岸線の長さは何 km であろうか。線分の長さであれば、誰がどのように測っても同じような結果が得られるであろう。では、海岸線のように複雑に入り組んだ曲線だったら、どうなるであろうか。本実験では、地形図に描かれている等高線を題材にして、自然界で見られる複雑さについてのデータ解析を行なう。

課題（1）と（2）のグラフはグラフ用紙に作図し（手書き)、課題（1）と（2）のデータの表と解析結果の数値、および課題（3）と（4）はレポート用紙等に書いて提出しなさい（手書きでもワープロでもよい)。適切なタイトルと学籍番号、氏名を記載した表紙をつけ、ホッチキスでとじて提出すること。サイズはＡ４とする。

２．用意するもの

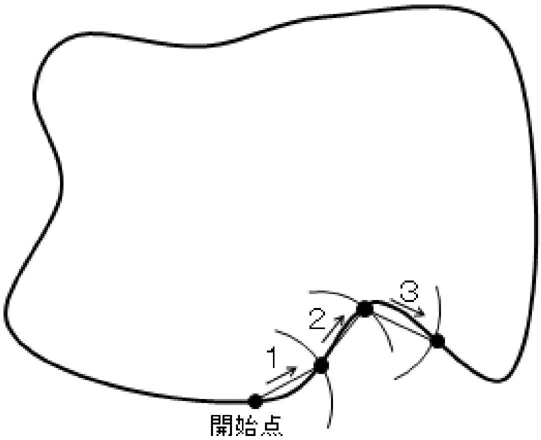
筆記用具、レポート用紙、赤ボールペン（または赤鉛筆)、定規、デバイダーまたはコンパス（製図用)、ノートパソコン（以上は各自持参)、グラフ用紙、両対数グラフ用紙

３．地図

使用する地図は以下の２枚である。
１．国土地理院発行　二万五千分一地形図　「富士山」
２．国土地理院発行　二万五千分一地形図　「仙丈ヶ岳」

４．海岸線の長さ

海岸線の長さの計測を試みる。コンパスの脚を幅 ε に開き、地図上で海岸線に沿ってコンパスを進めていく。つまり、海岸線を長さ ε の線分からなる折れ線で近似することを考える。



折れ線を構成する線分の本数は ε の関数になるので、 n（ε）とおく。このとき、海岸線の長さの近似値 L（ε） は次のようになる。

$$L(\varepsilon) = \varepsilon n(\varepsilon)$$

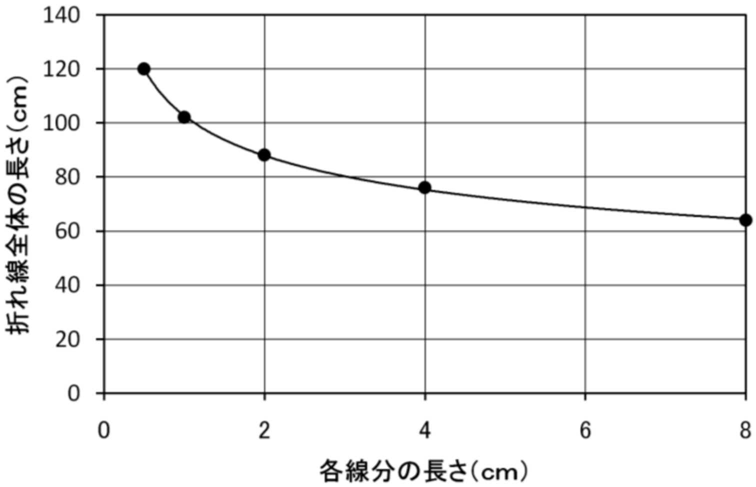
近似の精度を上げるには、コンパスの脚の幅 ε を小さくして、折れ線を細かくすればよい。海岸線の長さの真の値 L_{true} は 、L（ε）の $\varepsilon \to 0$ の極限で与えられると考えられる。

$$L_{true} = \lim_{\varepsilon \to 0} L(\varepsilon)$$

実際に、ある地形について、各線分の長さと折れ線を構成する線分の本数との関係を地図上で計測したところ、次のような結果が得られた。

各線分の長さと線分の本数との関係

各線分の長さ [cm]	線分の本数	折れ線全体の長さ　[cm]
8.0	8	64.0
4.0	19	76.0
2.0	44	88.0
1.0	102	102.0
0.5	240	120.0

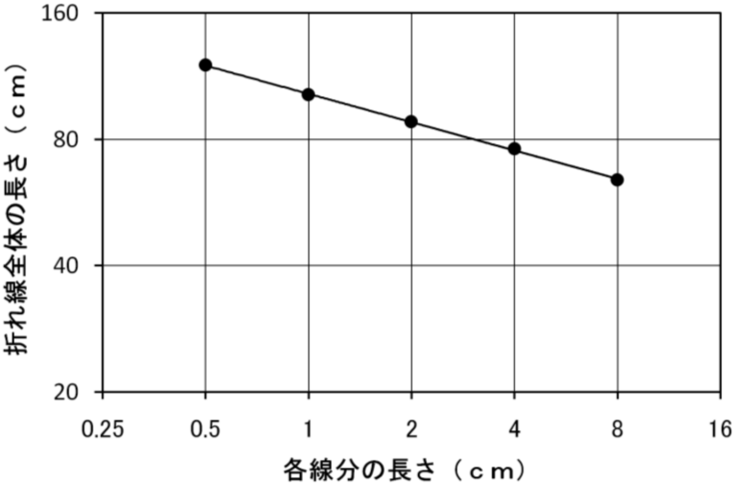


各線分の長さと折れ線全体の長さとの関係

折れ線全体の長さ、つまり、各線分の長さ ε と線分の本数 n（ε）との積が海岸線の近似的な長さを与えるはずである。しかし、近似の精度を上げるために線分の長さを短くすればするほど、折れ線全体の長さ L（ε）は長くなっていき、一定値に収束するかはっきりしない。

そこで、線分の長さ ε を 1/2 倍しながら計測を反復してきたことを考えて、上の結果を両対数グラフ上に示してみた。図をみると、$\log \varepsilon$ と $\log L$（ε）との間に直線的な関係があり、$\log \varepsilon$ が小さくなるにつれて $\log L$（ε）が大きくなることがわかる。$\varepsilon \to 0$ は $\log \varepsilon \to -\infty$ に対応するので、$\varepsilon \to 0$ の極限では、$\log L$（ε）$\to +\infty$、つまり $\log L$（ε）$\to +\infty$ であると考えられる。実は、現実の海岸線においては、上記のように折れ線を用いて定義された海岸線の長さ L（ε）は $\varepsilon \to 0$ の極限で有限な値には収束せず、無限大に発散することが知られている。このことは、線分の長さを半分にしたとき、線分の本数が単純に２倍になるのではなく、2^D 倍（ただし $D>1$）になっていることと関係している（このため、下の図のように、両者の関係は両対数グラフ上の

直線として表される)。海岸線で囲まれる領域の面積が有限であっても、その領域を囲む海岸線の長さは有限ではないのである。したがって、海岸線の長さを厳密に定量化することは不可能である。



各線分の長さと折れ線全体の長さとの関係（両対数グラフで示したもの）

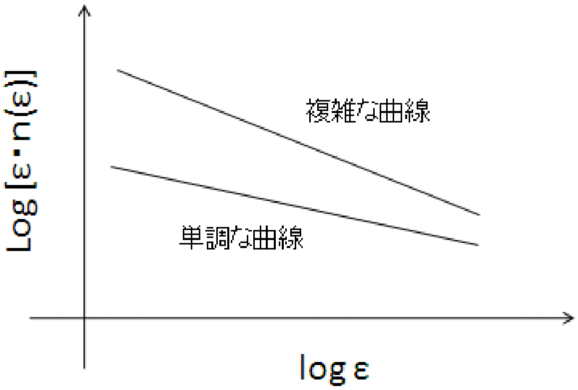
５．フラクタル次元と自己相似

海岸線の長さを定量化できないことが分かったが、何らかの形で海岸線の特性を数値で表すことはできないだろうか。「線分の長さを半分にしたとき、線分の本数が 2^D倍（ただし$D>1$）になる」と述べたが、このDの値は、どんな海岸線についても同じ値をとるわけではない。そこで、このDの値を用いて、海岸線の特性を定量化することを考えてみよう。

実は、海岸線や等高線のような曲線に関しては、$\varepsilon \to 0$の極限において、

$$n(\varepsilon) \to n_0 \varepsilon^{-D}$$

であることが知られている。たとえば、εを$1/2$倍すると、線分の数は2^D倍になる。直線であれば、εを$1/2$倍すると、線分の数は２倍になるから、$D=1$である。現実の海岸線や等高線では$D>1$であり、形が複雑になるほどDの値は大きくなる。このDを**フラクタル次元**(fractal dimension) †と呼ぶ。フラクタル次元は、長さが不定である、海岸線や等高線のような曲線の複雑さを定量的に表現する量である。どんなに拡大しても凹凸が存在する、海岸線や等高線のような曲線では、フラクタル次元は１より大きく、その形状が複雑であるほどフラクタル次元は大きくなる。



各線分の長さと折れ線全体の長さとの関係の概念図

さて、どんなに各線分を短くしていっても、線分の長さεが１／２倍になるごとに、線分の数ｎ（ε）が２^{D}倍になっていく状況を考えよう。このような場合、曲線をみる尺度を細かくしていっても同程度の複雑さがあるといえる。このように、どんなに拡大して細かい尺度で見ても、その尺度なりに同様の複雑さが存在するような性質を**自己相似**(self-similarity)という。ここで「相似」とは、形は同じとは限らないが統計的な性質は同じという意味である。このような自己相似性を持つ図形のことを**フラクタル**(fractal)[†]という。海岸線や等高線はフラクタルの例として挙げられることが多い。

[†]ここで示したフラクタルやフラクタル次元の定義は一例であり、これ以外の定義も存在する。ここで定義したフラクタル次元はハウスドルフ次元とよばれている。

６．課題

（１）二万五千分一地形図「富士山」において、富士山周辺の 2500mの等高線（最も主要なもの）を赤線でなぞれ。次に、デバイダーまたはコンパスの脚を幅εに開き、この等高線を長さεの線分からなる折れ線で近似して、線分の本数を数えよ。ただしεの値は、8.0cm、5.6cm、4.0cm、2.8cm、2.0cm、1.4cm、1.0cm、0.7cm、0.5cm の９通りとする。結果（εの値と線分の本数との関係）を表にまとめ、両対数グラフに散布図として図示せよ。横軸をε、縦軸を線分の数n（ε）とする（縦軸は折れ線全体の長さではないので注意すること）。

次に、両対数グラフ上での回帰直線を求め散布図の中に図示せよ。回帰式もグラフの中に適切に示すこと。この回帰計算においては、εとn（ε）の値をそのまま使うのではなく、log εと log n（ε）について回帰計算を行なう点に注意せよ（回帰直線の計算にはパソコンを用いてよいが、作図は手書きとする）。さらに、回帰直線の傾きから、この等高線のフラクタル次元を求めよ（小数点第３位まで）。同様の解析を 2000mの等高線についても行なえ。

回帰直線に関しては、下記の解説を参考にしてよい。

（２）二万五千分一地形図「仙丈ヶ岳」において、（１）と同様の解析を、野呂川沿いの 2000mの等高線と、仙丈ヶ岳周辺の 2500mの等高線に関して行なえ。

※課題（１）と（２）で合計４本の等高度線を解析するが、表とグラフは、課題（１）と（２）

で別々に作るのではなく、ひとつの表とグラフにまとめよ。グラフにおいては、適切に点や線の種類を使い分けて凡例を示し、分かりやすく表示すること。

（３）課題（１）と（２）の結果にはどのような違いがあるか。また、その違いは地形のどのような特徴と関係しているか考察せよ。

（４）自然界の中には、海岸線や等高線以外にも自己相似性を持つ図形（フラクタル）が存在する。具体例をひとつ以上挙げよ。

回帰直線とは

回帰直線とは、２組の数値からなるデータ列(x_i, y_i)における x と y の関係を、y=ax+b で近似する直線のことである。回帰係数 a が正であるということは、x が大きくなるほど y も大きくなる傾向があることを示している。負の場合はこの逆である。２組の数値からなるデータ列(x_i, y_i) (i=1, 2, …, n)において、y を x へ回帰したときの回帰直線 y=ax+b は、

$$a = \frac{\sum_{i=1}^{n}\{(x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})\}}{\sum_{i=1}^{n}\{(x_i - \overline{x})^2\}}, \quad b = \overline{y} - a\overline{x}$$

で求められる。ただし、

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}, \quad \overline{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n}$$

である。

課題の解答は、学籍番号と氏名の記入を確認のうえ、次回の実験の開始時までに提出してください。

（予習）

円周率の求め方

円周率の求め方にはさまざまな方法があるが、ここでは、円に内接する正多角形の周の長さで円周を近似して、円周率を求めることを考える。

たとえば、半径１の円に内接する正６角形の辺の長さは１だから、周の長さは６である。したがって、円周は６よりは大きいはずである。つまり、円周率は６÷２＝３よりは大きいことがわかる。

次に、半径１の円に内接する正 12 角形の辺の長さを求めてみよう。下の図で、

$$\mathrm{AM}=\frac{1}{2}$$

である。三平方の定理を用いると、

$$\mathrm{OM}=\sqrt{\mathrm{OA}^2-\mathrm{AM}^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

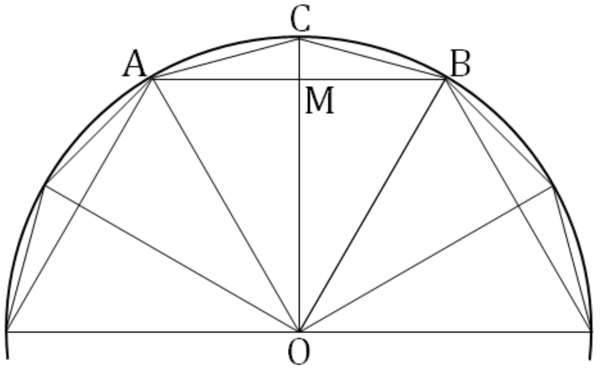
となる。したがって、

$$\mathrm{CM}=1-\mathrm{OM}=\frac{2-\sqrt{3}}{2}$$

である。さらに、三平方の定理を用いて、

$$\mathrm{AC}=\sqrt{\mathrm{AM}^2+\mathrm{CM}^2}=\sqrt{2-\sqrt{3}}$$

と求められる。正 12 角形の辺の長さが $\sqrt{2-\sqrt{3}}\cong 0.5176380$ だから、周の長さは $12\sqrt{2-\sqrt{3}}$ である。したがって、円周は $12\sqrt{2-\sqrt{3}}$ よりは大きいはずである。つまり、円周率は $6\sqrt{2-\sqrt{3}}\cong 3.1058280$ よりは大きいことがわかる。



このようにして、正 24 角形、正 48 角形、正 96 角形、…というように計算していけば、円を正ｎ角形（ｎ→∞）で近似したことになり、円周率の近似値を求めることができるであろう。正

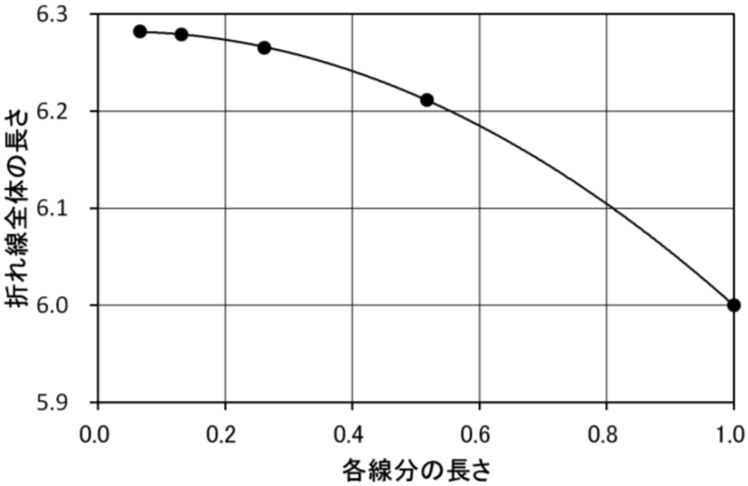
24 角形の辺の長さは$\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}$、正 48 角形の辺の長さは$\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}$、正 96 角形の辺の長さは、$\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}$である。これらの結果を表にまとめると次のようになる。

半径１の円に内接する正ｎ角形の一辺と周の長さ

n	一辺の長さ	周の長さ
6	1.0000000	6.0000000
12	0.5176380	6.2116560
24	0.2610524	6.2652576
48	0.1308063	6.2787024
96	0.0654385	6.2820960

実際に、ｎを大きくすると、周の長さが円周率の２倍の値に近づいていくことがわかる。

以上の作業は、円周という滑らかな曲線の長さを正多角形という折れ線で近似することによって求めたことになる。当然、折れ線を構成する線分の長さが短いほど、折れ線全体の長さは曲線の真の長さに近くなると予想できる。各線分の長さと折れ線全体の長さとの関係をグラフに示すと次のようになる。



各線分の長さと折れ線全体の長さとの関係

この結果から、折れ線を構成する線分の長さを短くすれば、折れ線全体の長さが曲線の真の長さに近づいていることが確かめられる。