第３週：　大気の安定度の解析（基礎）

１．乾燥大気の安定度

大気中を空気塊が上昇すると、周囲の気圧の低下とともに膨張する。このとき、空気塊は断熱膨張するので、周りの空気に対して仕事をした分だけ熱エネルギーが減少し、空気塊の温度は低下する。逆に、空気塊が下降すると断熱圧縮されるので、温度は上昇する。飽和に達していない空気塊が断熱的に上昇するときの温度低下の割合を**乾燥断熱減率**という。

ここで、大気の乾燥断熱減率を計算してみよう。まず、大気が理想気体であることを仮定すると、状態方程式は、圧力を p 、比容を α 、温度を T 、気体定数を R として、

$$p\alpha = RT \tag{1}$$

と書ける。乾燥空気に対しては $R = 287$ J/kg K である。一方、熱力学の第 1 法則は、内部エネルギーを U 、気体に加えた熱を $d'Q$ 、気体が外部にした仕事を $d'W$ として、

$$d'Q = dU + d'W \tag{2}$$

と表せる。ここで、$U = C_v T$ 、$d'W = pd\alpha$ とすると、

$$d'Q = C_v dT + pd\alpha \tag{3}$$

と書くことができる。ただし、C_v は乾燥空気の定積比熱である。(1)より、$pd\alpha + \alpha dp = RdT$ だから、

$$d'Q = (C_v + R)dT - \alpha dp = C_p dT - \alpha dp \tag{4}$$

と変形できる。ただし、C_p は乾燥空気の定圧比熱であって、$C_p = 1004$ J/kg K である。断熱膨張や断熱圧縮を考えているので、$d'Q = 0$ とすると、

$$C_p dT - \alpha dp = 0 \tag{5}$$

となる。微小変化を高度 z についての微分と考えると、

$$C_p \frac{dT}{dz} - \alpha \frac{dp}{dz} = 0 \tag{6}$$

一方、静水圧平衡の関係より、

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g \tag{7}$$

が成り立っている。ただし、ρ は気体の密度である。また、g は重力加速度であって、$g = 9.81\,\mathrm{m/s^2}$ である。ゆえに、

$$C_p \frac{dT}{dz} + g = 0$$

となって、乾燥大気の断熱減率 Γ_d は

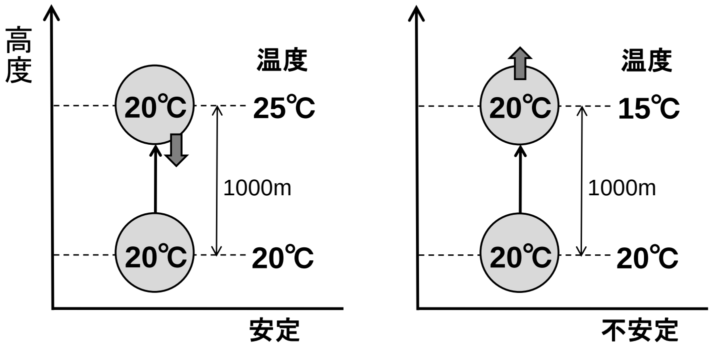
$$\Gamma_d = -\frac{dT}{dz} = \frac{g}{C_p} \tag{8}$$

となる。現実の地球大気においては、乾燥断熱減率は、100m につき約 1.0℃である。

☞　高等学校の地学で乾燥断熱減率を取り上げる。上記のような理論的な導出は行なわないが、定量的な値を具体的に取り扱う。中学校の第 2 分野では、断熱膨張による気温の低下を定性的に扱う。

２．温位

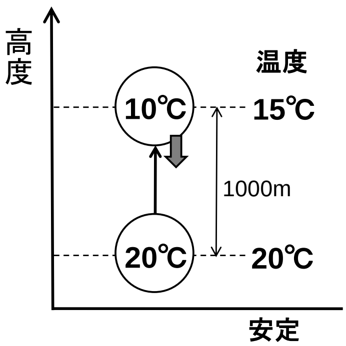
水のような、圧力変化による膨張や圧縮がほとんど生じない流体[†]の場合、鉛直方向の安定度は温度によって評価できる。左の図のように上に行くほど温度が高い場合を考える。水塊を持ち上げると、持ち上げられた水塊の温度はまわりの温度よりも低くなる。このため、水塊の密度が大きくなり、下向きの力を受ける。このように変位に対して復元力がはたらくので、このような温度成層は安定であるといえる。一方、右の図のように上に行くほど温度が低い場合には、水塊を持ち上げると、持ち上げられた水塊の温度はまわりの温度よりも高くなり、浮力を受ける。変位をさらに大きくする方向に力がはたらくので、このような温度成層は不安定であるといえる。



つまり、圧縮性のない流体の場合、上に行くほど温度が高くなっていれば安定、低くなっていれば不安定である。

[†]厳密には水にも圧縮性があり、高圧の場合には、圧縮による温度変化を無視できない。

では、圧縮性のある空気の場合はどうであろうか。図のように 1000m 上空で温度が５℃低くなっている状況を考える。20℃の空気塊を 1000m だけ上方に持ち上げると乾燥断熱減率にしたがって温度が低下し 10℃になる。このため、持ち上げられた空気塊はまわりの空気の温度よりも重くなり、下向きの力を受けることになる。したがって、このような大気の温度成層は安定である。



このことから分かるように、圧縮性のない場合は鉛直運動について温度が保存するが、圧縮性がある場合には保存しないので、単純に温度を比較しただけでは大気の安定度を評価することが

できない。そこで、断熱という条件のもとで、圧力が変化しても保存するような温度に代わる新しい保存量を定義してみよう。そのような物理量を用いると、大気の安定度を直接評価できるので便利である。断熱という条件のもとで成り立っている(5)式を変形すると、

$$\frac{dT}{T} - \frac{R}{C_p}\frac{dp}{p} = 0 \tag{9}$$

と書くことができる。(9)式の両辺を積分すると、

$$\log T - \frac{R}{C_p}\log p = C'' \quad (C''\text{は定数}) \tag{10}$$

両辺の指数関数を計算すると、

$$T \times p^{-\frac{R}{C_p}} = C' \quad (C'\text{は定数}) \tag{11}$$

(11)式は、基準となる気圧の値 p_0 を適当に定めて、

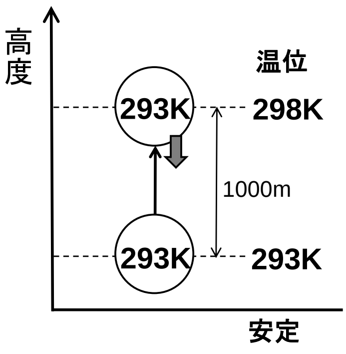
$$T\left(\frac{p}{p_0}\right)^{-\frac{R}{C_p}} = C \quad (C\text{ は定数}) \tag{12}$$

と書くこともできる。(12)式は、断熱変化に対して、左辺が一定値であることを示している。したがって、新しい物理量 θ を

$$\theta = T\left(\frac{p}{p_0}\right)^{-\frac{R}{C_p}} \tag{13}$$

と定義すれば、θ は断熱変化（断熱圧縮・膨張）に対して保存する量である。この θ を**温位**という。通常、 $p_0 = 1000$ hPa とする。

上の図の事例を温位で表すと次のようになる（温位の値は概算である）。



上に行くほど温位が高くなっていれば安定、低くなっていれば不安定である。温度減率が乾燥断熱減率と等しいとき、温位は高度によらず一定である。

問 1 （1）温位 $\theta = T\left(\frac{p}{p_0}\right)^{-R/C_p}$ について、$d\theta = 0$ という条件を与えることによって、$\frac{dT}{dp}$ を求めよ。ただし、理想気体の状態方程式を用いて、 p と T を陽に含まない形で表せ。

（2）さらに、静水圧平衡の関係を適用することによって、$\dfrac{dT}{dz}$ を求めよ。

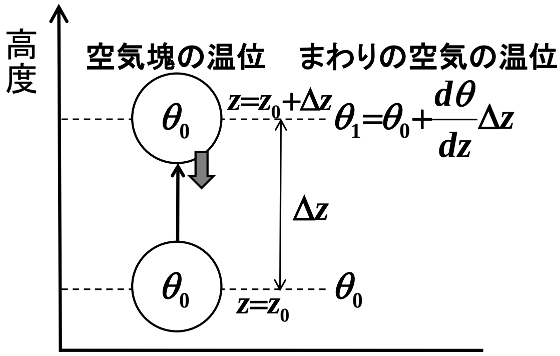
問 2 以下のような高層気象観測データについて、各気圧面での温位[K]を計算せよ。０℃は 273.15K である。また、気体定数と定圧比熱の比は、$R/C_p = 2/7$ としてよい。解答は表で示すこと。

気圧[hPa]	高度[m]	気温[℃]
1007.6	31	25.1
1000	98	24.5
925	782	22.2
850	1515	18.3
700	3156	9.9
500	5885	-4.4
400	7611	-15.2
300	9722	-28.9

（気象庁のウェブサイトより）

３．ブラント・ヴァイサラ振動数

安定成層、つまり $\dfrac{d\theta}{dz} > 0$ という条件のもとで、空気塊の鉛直方向の運動を考える。



ある高度 z_0 で温位が θ_0 の空気塊を高度 $z_0 + \Delta z$ まで断熱的に持ち上げたとする。断熱という条件のもとでは温位は変化しないから、持ち上げられた空気塊の温位は θ_0 である。一方、まわりの空気の温位 θ_1 は、$\theta_1 = \theta_0 + \dfrac{d\theta}{dz}\Delta z$ である。持ち上げられた空気塊の密度を ρ_0 とすると、まわりの空気の密度 ρ_1 は、空気塊の温度を T_0、まわりの空気の温度を T_1 として、

$$\rho_1 = \rho_0 \frac{T_0}{T_1} = \rho_0 \frac{\theta_0}{\theta_1} = \rho_0 \frac{\theta_0}{\theta_0 + \dfrac{d\theta}{dz}\Delta z} \tag{14}$$

と表せる。したがって、空気塊の運動方程式は、重力と浮力を考慮して、

$$\rho_0 \frac{d^2}{dt^2}\Delta z = -\rho_0 g + \rho_1 g = -\rho_0 g + \rho_0 \frac{\theta_0}{\theta_0 + \frac{d\theta}{dz}\Delta z} g \tag{15}$$

と書ける。この方程式を変形すると、

$$\rho_0 \frac{d^2}{dt^2}\Delta z = -\rho_0 g \frac{\frac{d\theta}{dz}}{\theta_0 + \frac{d\theta}{dz}\Delta z}\Delta z \tag{16}$$

となる。$\Delta z \to 0$ とすると、$\theta_0 + \frac{d\theta}{dz}\Delta z \to \theta_0$ である。θ_0 をあらためて θ と書いて、

$$\frac{d^2}{dt^2}\Delta z = -\frac{g}{\theta}\frac{d\theta}{dz}\Delta z \tag{17}$$

が得られる。ここで、

$$N^2 = \frac{g}{\theta}\frac{d\theta}{dz} \tag{18}$$

とおくと、

$$\frac{d^2}{dt^2}\Delta z = -N^2 \Delta z \tag{19}$$

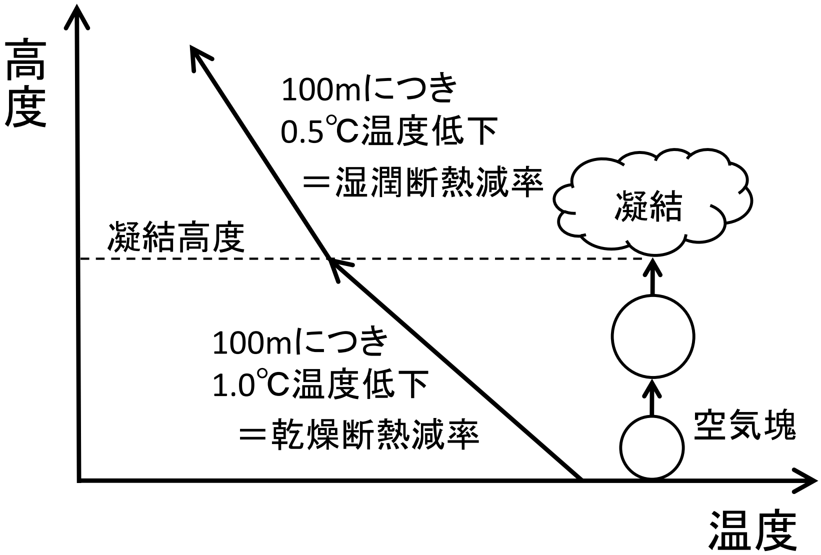
と書くことができる。この方程式は角振動数 N の単振動を表す。この N を**ブラント・ヴァイサラ振動数**という。対流圏ではブラント・ヴァイサラ振動数は $N = 1.0 \times 10^{-2}$ /s 程度の値をとることが多い。

問 3 問 2 の高層気象観測データについて、各気圧面でのブラント・ヴァイサラ振動数を計算せよ（有効数字 2 桁)。差分のとりかたは各自で判断してよい（となりあう２つの指定気圧面の間の振動数を計算してもよいし、指定気圧面における振動数を両隣のデータから求めてもよい)。重力加速度は $9.81\ \mathrm{m/s^2}$ とする。解答は表で示すこと。

４．湿潤大気の安定度

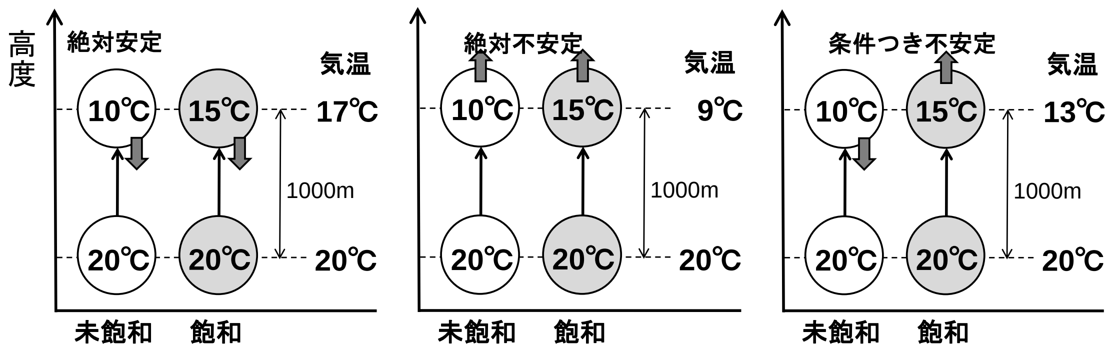
飽和に達していない空気塊を断熱的に持ち上げると、乾燥断熱減率にしたがって温度が低下していくので、ある高度で飽和に達し、水蒸気の凝結が始まる。このときの高度を**凝結高度**という。空気塊がさらに上昇を続けると、水蒸気が凝結するときに凝結熱が放出されて空気塊が暖められるので、温度の低下の割合は乾燥断熱減率よりも小さくなる。このときの温度低下の割合を**湿潤断熱減率**という。比較的高温な環境では、湿潤断熱減率は 100m につき約 0.5℃である。

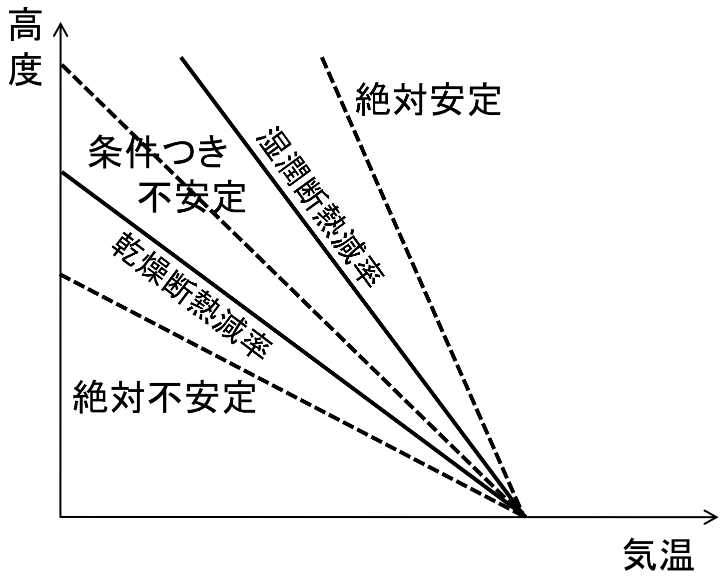
☞ 高等学校の地学で湿潤断熱減率を取り上げる。定量的な値のほか、乾燥断熱減率との大小関係や、その原因についても触れる。



実際の大気において、高度による温度低下の割合を**温度減率**（**気温減率**）という。温度減率が断熱減率よりも大きい場合、大気の状態は不安定であり、雲が発達しやすい。逆に、高度による温度低下の割合が断熱減率よりも小さい場合には、大気の状態は安定である。

大気の温度減率が湿潤断熱減率よりも小さい場合には、未飽和の空気塊に対しても飽和空気塊に対しても大気の状態は安定である。このような状態を**絶対安定**（**安定**）という。逆に、温度減率が乾燥断熱減率よりも大きい場合には、空気塊が未飽和であっても飽和であっても、大気の状態は不安定である。この状態を**絶対不安定**（**不安定**）という。また、大気の温度減率が湿潤断熱減率よりも大きく乾燥断熱減率よりも小さい場合には、未飽和の空気塊に対しては安定であるが、飽和空気塊に対しては不安定である。これを**条件つき不安定**という。実際の大気の温度減率は状況によって異なるが、典型的には下層の大気では 100m につき約 0.6℃である。対流圏（高度約 11km まで）の大気は条件つき不安定であることが多い。





天気予報で「上空に寒気が入って大気の状態が不安定になるでしょう」と言うことがあるが、以上で説明したような大気の安定度の変化を指していることが多い。

エマグラムとは、縦軸に気圧（ｈＰａ）、横軸に温度（℃）をとって、高層気象観測で得られた気温と露点温度の観測値をプロットしたものである。気圧は、対数軸になっていて、上下が反転している。エマグラムには乾燥断熱減率や湿潤断熱減率も示されていて、大気の安定度を解析することができる。

（実線：気温、破線：露点温度）

エマグラムの例（2010 年 7 月 11 日 21 時、松江）

５．相当温位

乾燥大気の場合、断熱という条件のもとでは

$$d'Q = C_p dT - \alpha dp = 0 \tag{20}$$

が成り立っていて、この関係から温位θを定義した。ここでは、水蒸気の凝結を考慮した場合に、温位θに代わる保存量を導入する。水蒸気の凝結を考慮すると、熱力学の第 1 法則は、

$$d'Q = C_p dT - \alpha dp - L dr = 0 \tag{21}$$

と書ける。ただし、Lは水の凝結熱、rは混合比である。温位θの定義より、

$$d\theta = \frac{\theta}{T} dT - \frac{R\theta}{C_p p} dp$$

だから、

$$C_p T \frac{d\theta}{\theta} = C_p dT - \alpha dp \tag{22}$$

である。これを(21)に代入すると、

$$C_pT\frac{d\theta}{\theta}-Ldr=0 \tag{23}$$

となって、

$$\frac{d\theta}{\theta}-\frac{Ldr}{C_pT}=0 \tag{24}$$

が得られる。混合比rの変化は、空気塊が持ち上げ凝結高度に達した直後に集中して生じるので、Tを凝結高度における温度とし、$\frac{L}{C_pT}$は定数と近似できる。両辺を積分すると、

$$\log\theta-\frac{Lr}{C_pT}=C' \quad （C'\text{は定数）} \tag{25}$$

両辺の指数をとると、

$$\theta\exp\left(\frac{Lr}{C_pT}\right)=C \quad （C\text{は定数）} \tag{26}$$

この関係式は、水蒸気が凝結しても、左辺が一定であることを示している。したがって、新しい物理量θ_eを

$$\theta_e=\theta\exp\left(\frac{Lr}{C_pT}\right) \tag{27}$$

と定義すれば、θ_eは潜熱（水蒸気の凝結熱）以外の非断熱的な加熱がない限り保存する量である。このθ_eを**相当温位**という。なお、Tは凝結高度まで持ち上げたときの空気塊の温度である点に注意する。

下層の大気が湿潤な場合、上に行くほど温位θは高くなっているが、相当温位θ_eは低くなっていることがある。このような状況では、水蒸気の凝結が生じなければ大気は安定である。しかし、大気全体が持ち上げられて水蒸気の凝結によって凝結熱（潜熱）が生じると、下のほうの温位θが大きくなって不安定になる。このような状態を**対流不安定**（**ポテンシャル不安定**）という。梅雨期の集中豪雨は、下層に高相当温位の空気が流入することに伴って生じることが多い。南西から流入してくる相当温位の高い高温多湿な空気を**湿舌**という。

850 hPa 面の相当温位（単位は K）（2010 年 7 月 12 日 9 時[†]）

[†]厳密には 11 日 21 時の 12 時間予想図。

問いの解答は、学籍番号と氏名を確認のうえ、次回の実験の開始時に提出してください。