宇宙地球物理学実験（地形データの解析）

１．はじめに

たとえば、日本の本州の海岸線の長さは何㎞であろうか。直線の長さであれば、誰がどのように測っても同じような結果が得られるであろう。では、海岸線のように複雑に入り組んだ曲線だったら、どうなるであろうか。本実験では、地形図に描かれている等高線を題材にして、自然界で見られる複雑さについてのデータ解析を行なう。

課題１と２のグラフはグラフ用紙に作図し（手書き）、課題１と２のデータの表と解析結果の数値、および課題３と４はレポート用紙等に書いて提出しなさい（手書きでもワープロでもよい）。適切なタイトルと学籍番号、氏名を記載した表紙をつけ、ホッチキスでとじて提出すること。サイズはＡ４とする。

２．用意するもの

筆記用具、レポート用紙、赤ボールペン（または赤鉛筆）、デバイダーまたはコンパス（製図用）、ノートパソコン（以上は各自持参）、両対数グラフ

３．地図

使用する地図は以下の２枚である。

１．国土地理院発行　二万五千分一地形図　「富士山」
２．国土地理院発行　二万五千分一地形図　「仙丈ヶ岳」

４．海岸線の長さ

海岸線の長さを計測することを考える。コンパスの脚を幅 ε に開き、地図上で海岸線に沿ってコンパスを進めていく。つまり、海岸線を長さ ε の線分からなる折れ線で近似することになる。折れ線を構成する線分の本数は ε の関数であり、 $n(\varepsilon)$ とおく。このとき、海岸線の長さの近似値 $L(\varepsilon)$ は次のようになる。

$$L(\varepsilon) = \varepsilon n(\varepsilon)$$

近似の精度を上げるには、コンパスの脚の幅 ε を小さくして、折れ線を細かくすればよい。海岸線の長さの真の値 L_{true} は 、$L(\varepsilon)$ の $\varepsilon \to 0$ の極限で与えられると考えられる。

$$L_{true} = \lim_{\varepsilon \to 0} L(\varepsilon)$$

実際に、ある地形について、各線分の長さと折れ線を構成する線分の本数との関係を地図上で計測したところ、次の表のような結果が得られた。

各線分の長さと線分の本数との関係

各線分の長さ [cm]	線分の本数	折れ線全体の長さ [cm]
8	8	64
4	19	76
2	44	88
1	102	102
0.5	240	120

折れ線全体の長さ、つまり、各線分の長さεと線分の本数ｎ（ε）との積が海岸線の近似的な長さを与えるはずである。しかし、近似の精度を上げるために線分の長さを短くすればするほど、折れ線全体の長さＬ（ε）は長くなっていき、一定値に収束するようにはみえない。

実は、現実の海岸線においては、このように定義された海岸線の長さＬ（ε）はε→0 の極限で有限な値には収束せず、無限大に発散することが知られている。このことは、線分の長さを半分にしたとき、折れ線の本数が単純に２倍になるのではなく、２^{D}倍（ただしＤ＞１）になっていることと関係している。海岸線で囲まれる領域の面積が有限であっても、その領域を囲む海岸線の長さは有限ではないのである。したがって、海岸線の厳密な長さを定量化することは不可能である。

５．フラクタル次元と自己相似

海岸線の長さを定量化できないことが分かったが、何らかの形で海岸線の特性を数値で表すことはできないだろうか。線分の長さを半分にしたとき、「折れ線の本数が２^{D}倍（ただしＤ＞１）になる」と述べたが、このＤの値は、どんな海岸線についても同じ値をとるのではない。そこで、このＤの値を用いて、海岸線の特性を定量化することを考えてみよう。

実は、海岸線や等高線のような曲線に関しては、ε→０の極限において、

$$N(\varepsilon) \to N_0 \varepsilon^{-D}$$

であることが知られている。たとえば、εを１/２倍すると、折れ線の数は２^{D}倍になる。直線であれば、明らかにＤ＝１である。現実の海岸線や等高線ではＤ＞１であり、形が複雑になるほどＤの値は大きくなる。実は、Ｄの値は、海岸線や等高線の凹凸の度合いを示している。このＤを**フラクタル次元**と呼ぶ。フラクタル次元は、長さが不定である、海岸線や等高線のような曲線の複雑さを定量的に表現する量である。どんなに拡大しても凹凸が存在する、海岸線や等高線のような曲線では、フラクタル次元は１より大きく、その形状が複雑であるほどフラクタル次元は大きくなる。

どんなに拡大して細かい尺度で見ても、その尺度なりに同様の複雑さが存在するような性質を**自己相似**という。このような自己相似性を持つ図形のことを**フラクタル**という。海岸線や等高線はフラクタルの例として挙げられることが多い。

６．課題

課題１：二万五千分一地形図「富士山」において、富士山周辺の 2500ｍの等高線（最も主要なも

の）を赤線でなぞれ。次に、デバイダーまたはコンパスの脚を幅εに開き、この等高線を長さεの線分からなる折れ線で近似して、折れ線の本数を数えよ。ただしεの値は、8cm、5.6cm、4cm、2.8cm、2cm、1.4cm、1cm、0.7cm、0.5cm の９通りとする。結果を表にまとめ、両対数グラフに散布図として図示せよ。横軸をε、縦軸を線分の数Ｎ（ε）とする。両対数グラフ上での回帰直線を求め散布図の中に図示せよ。この回帰計算においては、εとＮ（ε）の値をそのまま使うのではなく、log ε と log Ｎ（ε）について回帰計算を行なう点に注意せよ（回帰直線の計算にはパソコンを用いてよいが、作図は手書きとする）。さらに、回帰直線の傾きから、この等高線のフラクタル次元を求めよ。同様の解析を 2000ｍの等高線についても行なえ。

回帰直線とは、２組の数値からなるデータ列(x_i, y_i)における x と y の関係を、y=ax+b で近似する直線のことである。回帰係数 a が正であるということは、x が大きくなるほど y も大きくなる傾向があることを示している。負の場合はこの逆である。２組の数値からなるデータ列(x_i, y_i) (i=1, 2, …, n)において、y を x へ回帰したときの回帰直線 y=ax+b は、

$$a = \frac{\sum_{i=1}^{n}\{(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})\}}{\sum_{i=1}^{n}\{(x_i - \bar{x})^2\}}, \quad b = \bar{y} - a\bar{x}$$

で求められる。ただし、

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}, \quad \bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n}$$

である。

課題２：二万五千分一地形図「仙丈ヶ岳」において、課題１と同様の解析を、野呂川沿いの 2000ｍの等高線と、仙丈ヶ岳周辺の 2500ｍの等高線に関して行なえ。

※課題１と２で合計４本の等高度線を解析するが、表とグラフはそれぞれ１枚にまとめよ。グラフにおいては、適切に点や線の種類を使い分けて凡例を示し、分かりやすく表示すること。

課題３：課題１と課題２の結果にはどのような違いがあるか。また、その違いは地形のどのような特徴と関係しているか考察せよ。

課題４：自然界の中には、海岸線や等高線以外にも自己相似性を持つ図形（フラクタル）が存在する。具体例をひとつ以上挙げよ。

課題の解答は、学籍番号と氏名の記入を確認のうえ、次回の実験の開始時までに提出してください。