

宇宙地球物理学実験（地形データの解析）

1. はじめに

たとえば、日本の本州の海岸線の長さは何 km であろうか。直線の長さであれば、誰がどのように測っても同じような結果が得られるであろう。では、海岸線のように複雑に入り組んだ曲線だったら、どうなるであろうか。本実験では、地形図に描かれている等高線を題材にして、自然界で見られる複雑さについてのデータ解析を行なう。

課題 1 と 2 のグラフはグラフ用紙に作図し（手書き）、課題 1 と 2 のデータの表と解析結果の数値、および課題 3 と 4 はレポート用紙等を書いて提出しなさい（手書きでもワープロでもよい）。適切なタイトルと学籍番号、氏名を記載した表紙をつけ、ホッチキスでとじて提出すること。サイズは A 4 とする。

2. 用意するもの

筆記用具、レポート用紙、赤ボールペン（または赤鉛筆）、デバイダーまたはコンパス（製図用）、両対数グラフ、パソコン

3. 地図

使用する地図は以下の 2 枚である。

1. 国土地理院発行 二万五千分一地形図 「富士山」
2. 国土地理院発行 二万五千分一地形図 「仙丈ヶ岳」

4. フラクタル次元と自己相似

海岸線の長さを計測することを考える。コンパスの脚を幅 ε に開き、地図上で海岸線に沿ってコンパスを進めていく。つまり、海岸線を長さ ε の線分からなる折れ線で近似することになる。線分の数は ε の関数であり、ここでは $n(\varepsilon)$ とおく。このとき、海岸線の長さの近似値 $L(\varepsilon)$ は次のようになる。

$$L(\varepsilon) = \varepsilon N(\varepsilon)$$

近似の精度を上げるには、コンパスの脚の幅 ε を小さくして、折れ線を細かくすればよい。海岸線の長さの真の値 L_{true} は、 $L(\varepsilon)$ の $\varepsilon \rightarrow 0$ の極限で与えられると考えられる。

$$L_{true} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} L(\varepsilon)$$

しかし、現実の海岸線においては、このように定義された海岸線の長さ $L(\varepsilon)$ は $\varepsilon \rightarrow 0$ の極限で有限な値には収束せず、無限大に発散する。すなわち、 ε の値を小さくすればするほど、折れ線全体の長さは無限に増大していく。海岸線で囲まれる領域の面積が有限であっても、その領域を囲む海岸線の長さは有限ではないのである。したがって、海岸線の厳密な長さを定量化することは不可能である。

では、線の長さではなく、凹凸の度合いを定量的に表すことはできないだろうか。実は、海岸線や等高線のような曲線に関しては、 $\varepsilon \rightarrow 0$ の極限において、

$$N(\varepsilon) \rightarrow N_0 \varepsilon^{-D}$$

であることが知られている。たとえば、 ε を 1/2 倍すると、折れ線の本数は 2^D 倍になる。直線であれば、明らかに $D = 1$ である。現実の海岸線や等高線では $D > 1$ であり、形が複雑になるほど D の値は大きくなる。この D を **フラクタル次元** と呼ぶ。フラクタル次元は、長さが不定である、海岸線や等高線のような曲線の複雑さを定量的に表現する量である。どんなに拡大しても凹凸が存在する、海岸線や等高線のような曲線では、フラクタル次元は 1 より大きく、その形状が複雑であるほどフラクタル次元は大きくなる。どんなに拡大して細かい尺度で見ても、その尺度なりに同様の複雑さが存在するような性質を **自己相似** という。このような自己相似性を持つ図形のことを **フラクタル** という。

5. 課題

課題 1：二万五千分一地形図「富士山」において、富士山周辺の 2500m の等高線（最も主要なもの）を赤線でなぞ

れ。次に、デバイダーまたはコンパスの脚を幅 ε に開き、この等高線を長さ ε の線分からなる折れ線で近似して、折れ線の本数を数えよ。ただし ε の値は、8cm、5.6cm、4cm、2.8cm、2cm、1.4cm、1cm、0.7cm、0.5cm の 9通りとする。結果を表にまとめ、両対数グラフに散布図として図示せよ。横軸を ε 、縦軸を線分の数 $N(\varepsilon)$ とする。両対数グラフ上での回帰直線を求め散布図の中に図示せよ（回帰直線の計算にはパソコンを用いてよいが、作図は手書きとする）。さらに、回帰直線の傾きから、この等高線のフラクタル次元を求めよ。同様の解析を 2000m の等高線についても行なえ。

回帰直線とは、2組の数値からなるデータ列 (x_i, y_i) における x と y の関係を、 $y=ax+b$ で近似する直線のことである。回帰係数 a が正であるということは、 x が大きくなるほど y も大きくなる傾向があることを示している。負の場合はこの逆である。2組の数値からなるデータ列 (x_i, y_i) ($i=1, 2, \dots, n$) において、 y を x へ回帰したときの回帰直線 $y=ax+b$ は、

$$a = \frac{\sum_{i=1}^n \{(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})\}}{\sum_{i=1}^n \{(x_i - \bar{x})^2\}}, \quad b = \bar{y} - a\bar{x}$$

で求められる。ただし、

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}, \quad \bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^n y_i}{n}$$

である。

課題 2 : 二万五千分一地形図「仙丈ヶ岳」において、課題 1 と同様の解析を、野呂川沿いの 2000m の等高線と、仙丈ヶ岳周辺の 2500m の等高線に関して行なえ。

※課題 1 と 2 で合計 4 本の等高線を解析するが、表とグラフはそれぞれ 1 枚にまとめよ。グラフにおいては、適切に点や線の種類を使い分けて凡例を示し、分かりやすく表示すること。

課題 3 : 課題 1 と課題 2 の結果にはどのような違いがあるか。また、その違いは地形のどのような特徴と関係しているか考察せよ。

課題 4 : 自然界の中には、海岸線や等高線以外にも自己相似性を持つ図形（フラクタル）が存在する。具体例をひとつ以上挙げよ。

課題の解答は、学籍番号と氏名の記入を確認のうえ、次回の実験の開始時まで提出してください。